GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/1.ª Fase 15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2015

VERSÃO 1

Página em branco

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis e, a seguir, passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \ e^u$

$(a^u)' = u' \ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Página em branco

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Dois rapazes e quatro raparigas vão sentar-se num banco corrido com seis lugares.

De quantas maneiras o podem fazer, de modo que fique um rapaz em cada extremidade do banco?

(A) 12 **(B)** 24 **(C)** 48 **(D)** 60

2. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}4$
- $P(\overline{B}) = 0{,}7$
- $P\left(A \cup B\right) = 0{,}5$

Qual é o valor de $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$?

(A) $0{,}6$ **(B)** $0{,}7$ **(C)** $0{,}8$ **(D)** $0{,}9$

3. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real k, igual a $\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right)$?

(A) $\frac{k}{2}$ **(B)** $k-2$ **(C)** $\frac{k}{9}$ **(D)** $k-9$

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = n^2$

Qual é o valor de $\lim f\left(u_n\right)$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** e **(D)** $+\infty$

5. Na Figura 1, está representado o círculo trigonométrico.

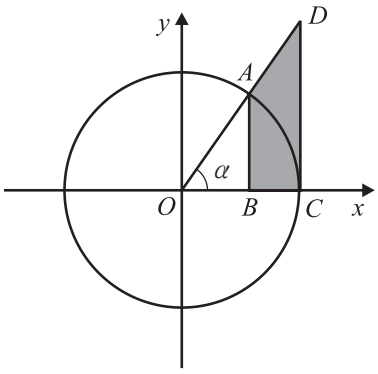

Figura 1

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;
- o ponto B pertence ao eixo Ox
- o ponto C tem coordenadas $(1, 0)$
- o ponto D pertence à semirreta $\dot{O}A$
- os segmentos de reta $[AB]$ e $[DC]$ são paralelos ao eixo Oy

Seja α a amplitude do ângulo COD $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero $[ABCD]$, representado a sombreado, em função de α ?

(A) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

(B) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$

(C) $\operatorname{tg}\alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$

(D) $\operatorname{tg}\alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

6. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$|z + 4 - 4i| = 3 \ \wedge \ \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$$

No plano complexo, esta condição define uma linha.

Qual é o comprimento dessa linha?

(A) π

(B) 2π

(C) 3π

(D) 4π

7. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. xOy, um triângulo equilátero $[ABC]$

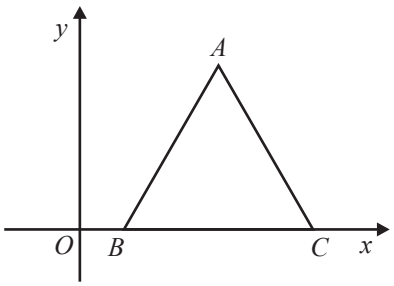

Figura 2

Sabe-se que:

- o ponto A tem ordenada positiva;
- os pontos B e C pertencem ao eixo Ox
- o ponto B tem abcissa 1 e o ponto C tem abcissa maior do que 1

Qual é a equação reduzida da reta AB ?

(A) $y = \sqrt{2}\,x - \sqrt{2}$

(B) $y = \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}$

(C) $y = \sqrt{3}\,x + \sqrt{3}$

(D) $y = \sqrt{3}\,x - \sqrt{3}$

8. Seja a um número real.

Considere a sucessão (u_n) definida por

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = -3\,u_n + 2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Qual é o terceiro termo desta sucessão?

(A) $6a + 4$

(B) $9a - 4$

(C) $6a - 4$

(D) $9a + 4$

Página em branco

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{-2 + 2i^{19}}{\sqrt{2}\,\text{cis}\,\theta}$

Determine os valores de θ pertencentes ao intervalo $]0, 2\pi[$, para os quais z é um número imaginário puro.

Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

2. De uma empresa com sede em Coimbra, sabe-se que:

- 60% dos funcionários residem fora de Coimbra;
- os restantes funcionários residem em Coimbra.

2.1. Relativamente aos funcionários dessa empresa, sabe-se ainda que:

- o número de homens é igual ao número de mulheres;
- 30% dos homens residem fora de Coimbra.

Escolhe-se, ao acaso, um funcionário dessa empresa.

Qual é a probabilidade de o funcionário escolhido ser mulher, sabendo que reside em Coimbra?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Considere agora que a empresa tem oitenta funcionários.

Escolhem-se, ao acaso, três funcionários dessa empresa.

A probabilidade de, entre esses funcionários, haver no máximo dois a residir em Coimbra é igual a

$$\frac{{}^{80}C_3 - {}^{32}C_3}{{}^{80}C_3}$$

Elabore uma composição na qual explique a expressão apresentada.

Na sua resposta:

- enuncie a regra de Laplace;
- explique o número de casos possíveis;
- explique o número de casos favoráveis.

3. Na Figura 3, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso.

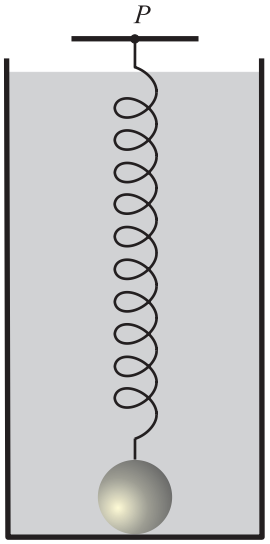

Figura 3

Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto P por uma mola esticada.

Num certo instante, a esfera é desprendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que, t segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada por

$$d(t) = 10 + (5 - t)e^{-0,05t} \quad (t \geq 0)$$

3.1. Sabe-se que a distância do ponto P à base do recipiente é $16\,\text{cm}$

Determine o volume da esfera.

Apresente o resultado em cm^3, arredondado às centésimas.

3.2. Determine o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} & \text{se } x < \dfrac{1}{2} \\ (x + 1)\ln x & \text{se } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Averigue da existência de assíntotas verticais do gráfico da função f

4.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

4.3. Mostre que a equação $f(x)=3$ é possível em $]1,e[$ e, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas.

Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação $f(x)=3$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1,e[$
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(0,0,2)$ e $B(4,0,0)$

5.1. Considere o plano α de equação $x-2y+z+3=0$

Escreva uma equação do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano α

5.2. Determine uma equação cartesiana que defina a superfície esférica da qual o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro.

5.3. Seja P o ponto pertencente ao plano xOy tal que:

- a sua abcissa é igual à abcissa do ponto B
- a sua ordenada é positiva;
- $B\hat{A}P=\frac{\pi}{3}$

Determine a ordenada do ponto P

6. Sejam f e g as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por

$$f(x)=1-\cos(3x) \quad \text{e} \quad g(x)=\operatorname{sen}(3x)$$

Seja a um número real pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$

Considere as retas r e s tais que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a
- a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $a+\frac{\pi}{6}$

Sabe-se que as retas r e s são perpendiculares.

Mostre que $\operatorname{sen}(3a)=-\frac{1}{3}$

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.**..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 15 pontos

2.2. ..... 15 pontos

3.

3.1. ..... 10 pontos

3.2. ..... 15 pontos

4.

4.1. ..... 15 pontos

4.2. ..... 15 pontos

4.3. ..... 15 pontos

5.

5.1. ..... 5 pontos

5.2. ..... 10 pontos

5.3. ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/1.ª Fase

Critérios de Classificação 14 Páginas

2015

VERSÃO DE TRABALHO

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização da linguagem científica adequada.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

VERSÃO DE TRABALHO

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam a realização de cálculos.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado, que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

VERSÃO DE TRABALHO

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

VERSÃO DE TRABALHO

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	C	B	A	B	C	D	B
Versão 2	B	B	A	D	C	B	C	C

GRUPO II

1. ..... **15 pontos**

Identificar i^{19} com $-i$ ..... 2 pontos

Escrever a expressão $-2+2i^{19}$ na forma algébrica $(-2-2i)$ ..... 1 ponto

Apresentar um argumento de $-2-2i$ ..... 2 pontos

Escrever um argumento de z, em função de θ ..... 2 pontos

Escrever uma condição em θ para que z seja um imaginário puro ..... 3 pontos

Resolver a condição em ordem a θ ..... 3 pontos

Obter os valores de θ pertencentes ao intervalo $]0, 2\pi[$ $\left(\frac{3\pi}{4}\right.$ e $\left.\frac{7\pi}{4}\right)$ ..... 2 pontos

2.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo (através de uma tabela de dupla entrada)

Construir uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam o género (homem, mulher) e o local de residência (Coimbra, fora de Coimbra) ..... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa à informação «60% dos funcionários residem fora de Coimbra» ..... 2 pontos

Preencher as células da tabela relativas à informação «o número de homens é igual ao número de mulheres» ..... 2 pontos

Utilizar a informação «30% dos homens residem fora de Coimbra» para determinar a probabilidade de o funcionário ser homem e residir fora de Coimbra, e colocar o valor obtido na célula respetiva (**ver nota**) ..... 4 pontos

Preencher as restantes células que permitem resolver o problema ..... 3 pontos

Identificar o pedido com $P(M|C)$, sendo M o acontecimento «o funcionário escolhido é mulher» e C o acontecimento «o funcionário escolhido reside em Coimbra» ..... 1 ponto

VERSÃO DE TRABALHO

Escrever $P(M|C)=\frac{P(M\cap C)}{P(C)}$ ..... 1 ponto

Obter $P(M|C)\ \left(\frac{1}{8}\right)$ ..... 1 ponto

Nota – Se, na resposta, o valor apresentado nesta célula for 0,3, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2.º Processo (através de um diagrama em árvore)

Construir um diagrama em árvore de cuja raiz saem dois ramos relativos ao género (homem, mulher) e de cada um destes saem dois novos ramos relativos ao local de residência (Coimbra, fora de Coimbra) ..... 2 pontos

Colocar as probabilidades relativas à informação «o número de homens é igual ao número de mulheres» nos respetivos ramos ..... 2 pontos

Colocar a probabilidade relativa à informação «30% dos homens residem fora de Coimbra» no respetivo ramo ..... 2 pontos

Colocar a probabilidade de o funcionário ser homem e residir fora de Coimbra .. 2 pontos

Colocar a probabilidade de o funcionário ser mulher e residir fora de Coimbra ..... 3 pontos

Colocar a probabilidade de o funcionário ser mulher e residir em Coimbra ..... 1 ponto

OU 4 pontos

Colocar a probabilidade de o funcionário ser homem e residir em Coimbra ..... 1 ponto

Colocar a probabilidade de o funcionário ser mulher e residir em Coimbra ..... 3 pontos

Identificar o pedido com $P(M|C)$, sendo M o acontecimento «o funcionário escolhido é mulher» e C o acontecimento «o funcionário escolhido reside em Coimbra» ..... 1 ponto

Escrever $P(M|C)=\frac{P(M\cap C)}{P(C)}$ ..... 1 ponto

Obter $P(M|C)\ \left(\frac{1}{8}\right)$ ..... 1 ponto

3.º Processo (aplicando as propriedades das probabilidades)

Seja M o acontecimento «o funcionário escolhido é mulher» e seja C o acontecimento «o funcionário escolhido reside em Coimbra».

Identificar o pedido com $P(M|C)$ ..... 1 ponto

Reconhecer que $P(\overline{C})=0{,}6$ ..... 1 ponto

Obter $P(C)$ ..... 1 ponto

Reconhecer que $P(M)=0{,}5$ ..... 1 ponto

Reconhecer $P(\overline{M})=0{,}5$ ..... 1 ponto

Reconhecer que $P(\overline{C}|\overline{M})=0{,}3$ ..... 2 pontos

Determinar $P(\overline{C}\cap\overline{M})$ ..... 2 pontos

Determinar $P(C\cup M)$ ..... 2 pontos

VERSÃO DE TRABALHO

Escrever $P(C \cup M) = P(C) + P(M) - P(C \cap M)$ ..... 1 ponto

Determinar $P(C \cap M)$ ..... 1 ponto

Escrever $P(M|C) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)}$ ..... 1 ponto

Obter $P(M|C)$ $\left(\dfrac{1}{8}\right)$ ..... 1 ponto

2.2. ..... **15 pontos**

Tópicos de resposta:

A) Enunciado da regra de Laplace: quando os casos possíveis são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis.

B) Explicação do número de casos possíveis: ${}^{80}C_3$ é o número de maneiras de escolher três funcionários, de entre os 80 funcionários da empresa.

C) Explicação do número de casos favoráveis: «haver, no máximo, dois funcionários a residir em Coimbra» é o contrário de «haver três funcionários a residir em Coimbra». Assim, o número de casos favoráveis é igual à diferença entre o número de maneiras de escolher 3 dos 80 funcionários da empresa $({}^{80}C_3)$ e o número de maneiras de escolher 3 dos 32 $(40\%$ de $80)$ funcionários da empresa que residem em Coimbra.

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
5	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	15
4	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e C OU apenas os tópicos B e C, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	12
3	Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e C OU apenas os tópicos B e C, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e B OU apenas o tópico C, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	9
2	Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e B OU apenas o tópico C, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, é contemplado apenas o tópico A OU apenas o tópico B, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	6
1	Na resposta, é contemplado apenas o tópico A OU apenas o tópico B, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	3

3.1. ..... **10 pontos**

Determinar $d(0)$ ..... 4 pontos

Determinar o raio da esfera ..... 3 pontos

Obter o volume da esfera com o arredondamento pedido $\left(4{,}19\ \text{cm}^3\right)$ ..... 3 pontos

VERSÃO DE TRABALHO

3.2. ..... **15 pontos**

Determinar $d'(t)$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

Aplicar a regra de derivação do produto de duas funções ..... 1 ponto

Escrever $d'(t) = -e^{-0,05t} - 0,05(5-t)e^{-0,05t}$ ..... 2 pontos

Escrever a equação $d'(t) = 0$ ..... 1 ponto

Resolver a equação $d'(t) = 0$ ..... 5 pontos

Escrever $d'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,05t}\left(-1 - 0,05(5-t)\right) = 0$ ..... 2 pontos

Escrever $e^{-0,05t}\left(-1 - 0,05(5-t)\right) = 0 \Leftrightarrow -1 - 0,05(5-t) = 0$ 2 pontos

Concluir que $d'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 25$ ..... 1 ponto

Justificar que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima para $t = 25$ ..... 5 pontos

Apresentar um quadro de sinal de d' e de monotonia de d ..... 4 pontos

Indicar o valor de t para o qual a função é mínima ..... 1 ponto

OU

Referir que, como a função d tem derivada finita em $\mathbb{R}^+$ e como 25 é o único zero da função d', o mínimo da função d só pode ser atingido para $t = 0$ ou para $t = 25$ ..... 2 pontos

Referir que $d(25) < d(0)$ ..... 3 pontos

Apresentar a resposta (25 segundos) ..... 1 ponto

Nota – Se, na resposta, for evidente a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é de 1 ponto.

4.1. ..... **15 pontos**

Justificar que apenas a reta de equação $x = \frac{1}{2}$ pode ser assíntota vertical do gráfico de f ..... 2 pontos

Determinar $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)$ ..... 10 pontos

Este limite pode ser determinado por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Escrever $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2x-1}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2x-1} = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^{\frac{1}{2}}\left(e^{x-\frac{1}{2}} - 1\right)}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}$ ..... 2 pontos

VERSÃO DE TRABALHO

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^{\frac{1}{2}}\left(e^{x-\frac{1}{2}}-1\right)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^{x-\frac{1}{2}}-1}{x-\frac{1}{2}}$ ..... 1 ponto

Escrever $\dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^{x-\frac{1}{2}}-1}{x-\frac{1}{2}} \underset{y=x-\frac{1}{2}}{=} \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y}-1}{y}$

(**ver nota**) ..... 2 pontos

Reconhecer o limite notável $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}=1$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) \quad \left(\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}\right)$ ..... 1 ponto

2.º Processo

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1} \underset{y=x-\frac{1}{2}}{=} \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y+\frac{1}{2}}-\sqrt{e}}{2y}$ ..... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y+\frac{1}{2}}-\sqrt{e}}{2y} = \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y+\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{2}}}{2y}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y+\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{2}}}{2y} = \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{\frac{1}{2}}(e^{y}-1)}{2y}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{\frac{1}{2}}(e^{y}-1)}{2y} = \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y}-1}{y}$ ..... 1 ponto

Reconhecer o limite notável $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}=1$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) \quad \left(\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}\right)$ ..... 1 ponto

3.º Processo

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1} = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2x-1}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2x-1} = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{x-\frac{1}{2}}$ ..... 1 ponto

VERSÃO DE TRABALHO

Referir que $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{x-\frac{1}{2}} = h'\left(\frac{1}{2}\right)$, sendo h a função

definida por $h(x) = e^x$ ..... 3 pontos

Referir que $h'\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}}$ ..... 2 pontos

Concluir que $\frac{1}{2} \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

OU ..... 2 pontos

Referir que a função f é contínua à direita em $\frac{1}{2}$

Concluir que o gráfico da função f não tem qualquer assíntota vertical ..... 1 ponto

Nota – Se, na resposta, for referido que $x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-$ é equivalente a $x-\frac{1}{2}\to 0^-$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

4.2. ..... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ ..... 3 pontos

Aplicar a regra de derivação do produto ..... 1 ponto

Obter $f'(x)$ ..... 2 pontos

Determinar $f''(x)$ em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ ..... 3 pontos

Determinar o zero de f'' em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ ..... 2 pontos

Escrever $f''(x) = 0$ ..... 1 ponto

Obter o zero de f'' em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ ..... 1 ponto

Estudar a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ ..... 7 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f'' e de sentido da concavidade do gráfico de f (ou equivalente) ..... 3 pontos

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ (**ver nota 1**) ..... 1 ponto

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]1, +\infty[$ (**ver nota 2**) ..... 1 ponto

Indicar as coordenadas do ponto de inflexão do gráfico da função f em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ $((1,0))$ ..... 2 pontos

VERSÃO DE TRABALHO

Notas:

1. Se, na resposta, for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$, em vez de $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

2. Se, na resposta, for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $[1, +\infty[$, em vez de $]1, +\infty[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

4.3. ..... **15 pontos**

Justificar que a equação $f(x) = 3$ tem, pelo menos, uma solução em $]1, e[$ 6 pontos

Referir que a função f é contínua em $[1, e]$ (**ver nota 1**) ..... 1 ponto

Calcular $f(1)$ ..... 1 ponto

Calcular $f(e)$ ..... 1 ponto

Referir que $f(1) < 3 < f(e)$ ..... 2 pontos

Concluir que a equação $f(x) = 3$ tem, pelo menos, uma solução em $]1, e[$ ..... 1 ponto

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora, que permite(m) resolver o problema (**ver nota 2**) ..... 4 pontos

Apresentar a solução pedida $(2, 41)$ ..... 5 pontos

Notas:

1. Se, na resposta, for referido que a função é contínua em $]1, e[$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação deve ser atribuída se, na resposta, apenas for referido que a função é contínua.

2. Se, na resposta, não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

5.1. ..... **5 pontos**

Escrever a equação $x - 2y + z + d = 0$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Determinar o valor de d ..... 2 pontos

Escrever uma equação do plano pedido $(x - 2y + z - 2 = 0$ ou equivalente$)$.. 1 ponto

VERSÃO DE TRABALHO

5.2. ..... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar $\overline{AB}$ ..... 2 pontos

Obter o raio da superfície esférica ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AB]$ ..... 2 pontos

Escrever a condição $(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=5$ (ou equivalente)
(**ver notas 1** e **2**) ..... 5 pontos

2.º Processo

Seja $P(x, y, z)$ um ponto genérico da superfície esférica.

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AP}$ ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BP}$ ..... 2 pontos

Escrever $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=0$ ..... 3 pontos

Escrever a condição $x^2+y^2+z^2-4x-2z=0$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Notas:

1. A escrita de $\sqrt{5}$, em vez de 5, implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa.

2. A escrita de $\leq$, em vez de $=$, implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa.
A escrita de $<$ ou de $>$ ou de $\geq$ implica uma desvalorização de 3 pontos nesta etapa.

5.3. ..... **15 pontos**

Seja y a ordenada do ponto P

Escrever $P(4, y, 0)$ ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AP}$ ..... 1 ponto

Calcular $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}$ ..... 2 pontos

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$ ..... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{AP}$, em função de y ..... 2 pontos

Escrever a equação $20=\sqrt{20}\times\sqrt{20+y^2}\times\frac{1}{2}$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Obter o valor de y $(\sqrt{60})$ ..... 3 pontos

VERSÃO DE TRABALHO

6. ..... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ ..... 2 pontos

Obter $f'(a)$ ..... 1 ponto

Determinar $g'(x)$ ..... 2 pontos

Determinar $g'\left(a+\frac{\pi}{6}\right)$ ..... 4 pontos

Escrever $g'\left(a+\frac{\pi}{6}\right)=3\cos\left(3\left(a+\frac{\pi}{6}\right)\right)$ ..... 1 ponto

Escrever $3\cos\left(3\left(a+\frac{\pi}{6}\right)\right)=3\cos\left(3a+\frac{\pi}{2}\right)$ ..... 1 ponto

Concluir que $3\cos\left(3a+\frac{\pi}{2}\right)=-3\,\text{sen}\,(3a)$ ..... 2 pontos

Escrever $f'(a)=-\frac{1}{g'\left(a+\frac{\pi}{6}\right)}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Concluir que $\text{sen}^2(3a)=\frac{1}{9}$ ..... 1 ponto

Concluir que $\text{sen}\,(3a)=-\frac{1}{3}$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

Nota – Se, na resposta, não for referido que $3a\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$ (ou equivalente), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

VERSÃO DE TRABALHO

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 15 pontos

2.2. ..... 15 pontos

3.

3.1. ..... 10 pontos

3.2. ..... 15 pontos

4.

4.1. ..... 15 pontos

4.2. ..... 15 pontos

4.3. ..... 15 pontos

5.

5.1. ..... 5 pontos

5.2. ..... 10 pontos

5.3. ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

VERSÃO DE TRABALHO

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/1.ª Fase

Braille, Entrelinha 1,5, sem figuras

Critérios de Classificação 14 Páginas

2015

VERSÃO DE TRABALHO

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização da linguagem científica adequada.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

VERSÃO DE TRABALHO

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam a realização de cálculos.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado, que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

VERSÃO DE TRABALHO

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

VERSÃO DE TRABALHO

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ..... (8 × 5 pontos) ..... **40 pontos**

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	C	B	A	B	C	D	B

GRUPO II

1. ..... **15 pontos**

Identificar i^{19} com $-i$ ..... 2 pontos

Escrever a expressão $-2+2i^{19}$ na forma algébrica $(-2-2i)$ ..... 1 ponto

Apresentar um argumento de $-2-2i$ ..... 2 pontos

Escrever um argumento de z, em função de θ ..... 2 pontos

Escrever uma condição em θ para que z seja um imaginário puro ..... 3 pontos

Resolver a condição em ordem a θ ..... 3 pontos

Obter os valores de θ pertencentes ao intervalo $]0,\ 2\pi[$ $\left(\frac{3\pi}{4}\text{ e }\frac{7\pi}{4}\right)$ ..... 2 pontos

2.1. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo (através de uma tabela de dupla entrada)

Construir uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam o género (homem, mulher) e o local de residência (Coimbra, fora de Coimbra) ..... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa à informação «60% dos funcionários residem fora de Coimbra» ..... 2 pontos

Preencher as células da tabela relativas à informação «o número de homens é igual ao número de mulheres» ..... 2 pontos

Utilizar a informação «30% dos homens residem fora de Coimbra» para determinar a probabilidade de o funcionário ser homem e residir fora de Coimbra, e colocar o valor obtido na célula respetiva (**ver nota**) ..... 4 pontos

Preencher as restantes células que permitem resolver o problema ..... 3 pontos

Identificar o pedido com $P(M|C)$, sendo M o acontecimento «o funcionário escolhido é mulher» e C o acontecimento «o funcionário escolhido reside em Coimbra» ..... 1 ponto

VERSÃO DE TRABALHO

Escrever $P(M|C)=\frac{P(M\cap C)}{P(C)}$ ..... 1 ponto

Obter $P(M|C)\ \left(\frac{1}{8}\right)$ ..... 1 ponto

Nota – Se, na resposta, o valor apresentado nesta célula for 0,3, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2.º Processo (através de um diagrama em árvore)

Construir um diagrama em árvore de cuja raiz saem dois ramos relativos ao género (homem, mulher) e de cada um destes saem dois novos ramos relativos ao local de residência (Coimbra, fora de Coimbra) ..... 2 pontos

Colocar as probabilidades relativas à informação «o número de homens é igual ao número de mulheres» nos respetivos ramos ..... 2 pontos

Colocar a probabilidade relativa à informação «30% dos homens residem fora de Coimbra» no respetivo ramo ..... 2 pontos

Colocar a probabilidade de o funcionário ser homem e residir fora de Coimbra .. 2 pontos

Colocar a probabilidade de o funcionário ser mulher e residir fora de Coimbra ..... 3 pontos

Colocar a probabilidade de o funcionário ser mulher e residir em Coimbra ..... 1 ponto

OU 4 pontos

Colocar a probabilidade de o funcionário ser homem e residir em Coimbra ..... 1 ponto

Colocar a probabilidade de o funcionário ser mulher e residir em Coimbra ..... 3 pontos

Identificar o pedido com $P(M|C)$, sendo M o acontecimento «o funcionário escolhido é mulher» e C o acontecimento «o funcionário escolhido reside em Coimbra» ..... 1 ponto

Escrever $P(M|C)=\frac{P(M\cap C)}{P(C)}$ ..... 1 ponto

Obter $P(M|C)\ \left(\frac{1}{8}\right)$ ..... 1 ponto

3.º Processo (aplicando as propriedades das probabilidades)

Seja M o acontecimento «o funcionário escolhido é mulher» e seja C o acontecimento «o funcionário escolhido reside em Coimbra».

Identificar o pedido com $P(M|C)$ ..... 1 ponto

Reconhecer que $P(\overline{C})=0{,}6$ ..... 1 ponto

Obter $P(C)$ ..... 1 ponto

Reconhecer que $P(M)=0{,}5$ ..... 1 ponto

Reconhecer $P(\overline{M})=0{,}5$ ..... 1 ponto

Reconhecer que $P(\overline{C}|\overline{M})=0{,}3$ ..... 2 pontos

Determinar $P(\overline{C}\cap\overline{M})$ ..... 2 pontos

Determinar $P(C\cup M)$ ..... 2 pontos

VERSÃO DE TRABALHO

Escrever $P(C \cup M) = P(C) + P(M) - P(C \cap M)$ ..... 1 ponto

Determinar $P(C \cap M)$ ..... 1 ponto

Escrever $P(M|C) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)}$ ..... 1 ponto

Obter $P(M|C)$ $\left(\dfrac{1}{8}\right)$ ..... 1 ponto

2.2. ..... **15 pontos**

Tópicos de resposta:

A) Enunciado da regra de Laplace: quando os casos possíveis são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis.

B) Explicação do número de casos possíveis: ${}^{80}C_3$ é o número de maneiras de escolher três funcionários, de entre os 80 funcionários da empresa.

C) Explicação do número de casos favoráveis: «haver, no máximo, dois funcionários a residir em Coimbra» é o contrário de «haver três funcionários a residir em Coimbra». Assim, o número de casos favoráveis é igual à diferença entre o número de maneiras de escolher 3 dos 80 funcionários da empresa $({}^{80}C_3)$ e o número de maneiras de escolher 3 dos 32 $(40\%$ de $80)$ funcionários da empresa que residem em Coimbra.

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
5	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	15
4	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e C OU apenas os tópicos B e C, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	12
3	Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e C OU apenas os tópicos B e C, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e B OU apenas o tópico C, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	9
2	Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e B OU apenas o tópico C, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, é contemplado apenas o tópico A OU apenas o tópico B, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	6
1	Na resposta, é contemplado apenas o tópico A OU apenas o tópico B, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	3

3.1. ..... **10 pontos**

Determinar $d(0)$ ..... 4 pontos

Determinar o raio da esfera ..... 3 pontos

Obter o volume da esfera com o arredondamento pedido $\left(4{,}19\ \text{cm}^3\right)$ ..... 3 pontos

VERSÃO DE TRABALHO

3.2. ..... **15 pontos**

Determinar $d'(t)$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

Aplicar a regra de derivação do produto de duas funções ..... 1 ponto

Escrever $d'(t) = -e^{-0,05t} - 0,05(5-t)e^{-0,05t}$ ..... 2 pontos

Escrever a equação $d'(t) = 0$ ..... 1 ponto

Resolver a equação $d'(t) = 0$ ..... 5 pontos

Escrever $d'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,05t}\left(-1 - 0,05(5-t)\right) = 0$ ..... 2 pontos

Escrever $e^{-0,05t}\left(-1 - 0,05(5-t)\right) = 0 \Leftrightarrow -1 - 0,05(5-t) = 0$ 2 pontos

Concluir que $d'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 25$ ..... 1 ponto

Justificar que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima para $t = 25$ ..... 5 pontos

Apresentar um quadro de sinal de d' e de monotonia de d ..... 4 pontos

Indicar o valor de t para o qual a função é mínima ..... 1 ponto

OU

Referir que, como a função d tem derivada finita em $\mathbb{R}^+$ e como 25 é o único zero da função d', o mínimo da função d só pode ser atingido para $t = 0$ ou para $t = 25$ ..... 2 pontos

Referir que $d(25) < d(0)$ ..... 3 pontos

Apresentar a resposta (25 segundos) ..... 1 ponto

Nota – Se, na resposta, for evidente a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é de 1 ponto.

4.1. ..... **15 pontos**

Justificar que apenas a reta de equação $x = \frac{1}{2}$ pode ser assíntota vertical do gráfico de f ..... 2 pontos

Determinar $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)$ ..... 10 pontos

Este limite pode ser determinado por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Escrever $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2x-1}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2x-1} = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^{\frac{1}{2}}\left(e^{x-\frac{1}{2}} - 1\right)}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}$ ..... 2 pontos

VERSÃO DE TRABALHO

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^{\frac{1}{2}}\left(e^{x-\frac{1}{2}}-1\right)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^{x-\frac{1}{2}}-1}{x-\frac{1}{2}}$ ..... 1 ponto

Escrever $\dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^{x-\frac{1}{2}}-1}{x-\frac{1}{2}} \underset{y=x-\frac{1}{2}}{=} \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y}-1}{y}$

(**ver nota**) ..... 2 pontos

Reconhecer o limite notável $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-1}{x}=1$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) \quad \left(\dfrac{1}{2}\,e^{\frac{1}{2}}\right)$ ..... 1 ponto

2.º Processo

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^{x}-\sqrt{e}}{2x-1}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^{x}-\sqrt{e}}{2x-1} \underset{y=x-\frac{1}{2}}{=} \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y+\frac{1}{2}}-\sqrt{e}}{2y}$ ..... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y+\frac{1}{2}}-\sqrt{e}}{2y} = \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y+\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{2}}}{2y}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y+\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{2}}}{2y} = \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{\frac{1}{2}}(e^{y}-1)}{2y}$ ..... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{\frac{1}{2}}(e^{y}-1)}{2y} = \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y}-1}{y}$ ..... 1 ponto

Reconhecer o limite notável $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-1}{x}=1$ ..... 1 ponto

Obter o valor de $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) \quad \left(\dfrac{1}{2}\,e^{\frac{1}{2}}\right)$ ..... 1 ponto

3.º Processo

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^{x}-\sqrt{e}}{2x-1}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^{x}-\sqrt{e}}{2x-1} = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^{x}-e^{\frac{1}{2}}}{2x-1}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^{x}-e^{\frac{1}{2}}}{2x-1} = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^{x}-e^{\frac{1}{2}}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^{x}-e^{\frac{1}{2}}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^{x}-e^{\frac{1}{2}}}{x-\frac{1}{2}}$ ..... 1 ponto

VERSÃO DE TRABALHO

Referir que $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{x-\frac{1}{2}} = h'\left(\frac{1}{2}\right)$, sendo h a função

definida por $h(x) = e^x$ ..... 3 pontos

Referir que $h'\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}}$ ..... 2 pontos

Concluir que $\frac{1}{2} \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$ ..... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

OU ..... 2 pontos

Referir que a função f é contínua à direita em $\frac{1}{2}$

Concluir que o gráfico da função f não tem qualquer assíntota vertical ..... 1 ponto

Nota – Se, na resposta, for referido que $x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-$ é equivalente a $x-\frac{1}{2}\to 0^-$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

4.2. ..... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ ..... 3 pontos

Aplicar a regra de derivação do produto ..... 1 ponto

Obter $f'(x)$ ..... 2 pontos

Determinar $f''(x)$ em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ ..... 3 pontos

Determinar o zero de f'' em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ ..... 2 pontos

Escrever $f''(x)=0$ ..... 1 ponto

Obter o zero de f'' em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ ..... 1 ponto

Estudar a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ ..... 7 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f'' e de sentido da concavidade do gráfico de f (ou equivalente) ..... 3 pontos

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{1}{2},1\right[$ (**ver nota 1**) ..... 1 ponto

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]1,+\infty[$ (**ver nota 2**) ..... 1 ponto

Indicar as coordenadas do ponto de inflexão do gráfico da função f em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ $((1,0))$ ..... 2 pontos

VERSÃO DE TRABALHO

Notas:

1. Se, na resposta, for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{1}{2},1\right]$, em vez de $\left]\frac{1}{2},1\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

2. Se, na resposta, for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $[1,+\infty[$, em vez de $]1,+\infty[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

4.3. ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Referir que a função f é contínua em $[1,e]$ (**ver nota**) ..... 2 pontos

Calcular $f(1)$ ..... 4 pontos

Calcular $f(e)$ ..... 4 pontos

Referir que $f(1)<3<f(e)$ ..... 4 pontos

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

2.º Processo

Referir que $f(x)=3$ é equivalente a $f(x)-3=0$ ..... 1 ponto

Referir que a função g, definida por $g(x)=f(x)-3$ é contínua em $[1,e]$ (**ver nota**) ..... 2 pontos

Calcular $g(1)$ ..... 4 pontos

Calcular $g(e)$ ..... 4 pontos

Referir que $g(1)$ e $g(e)$ têm sinais contrários (ou equivalente)..... 2 pontos

Concluir que a função g tem, pelo menos, um zero em $]1,e[$ ..... 1 ponto

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

Nota – Se, na resposta, for referido que a função é contínua em $]1,e[$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação deve ser atribuída se, na resposta, apenas for referido que a função é contínua.

5.1. ..... **5 pontos**

Escrever a equação $x-2y+z+d=0$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Determinar o valor de d ..... 2 pontos

Escrever uma equação do plano pedido $(x-2y+z-2=0$ ou equivalente$)$.. 1 ponto

VERSÃO DE TRABALHO

5.2. ..... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar $\overline{AB}$ ..... 2 pontos

Obter o raio da superfície esférica ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AB]$ ..... 2 pontos

Escrever a condição $(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=5$ (ou equivalente)
(**ver notas 1** e **2**) ..... 5 pontos

2.º Processo

Seja $P(x, y, z)$ um ponto genérico da superfície esférica.

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AP}$ ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BP}$ ..... 2 pontos

Escrever $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=0$ ..... 3 pontos

Escrever a condição $x^2+y^2+z^2-4x-2z=0$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Notas:

1. A escrita de $\sqrt{5}$, em vez de 5, implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa.

2. A escrita de $\leq$, em vez de $=$, implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa.
A escrita de $<$ ou de $>$ ou de $\geq$ implica uma desvalorização de 3 pontos nesta etapa.

5.3. ..... **15 pontos**

Seja y a ordenada do ponto P

Escrever $P(4, y, 0)$ ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AP}$ ..... 1 ponto

Calcular $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}$ ..... 2 pontos

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$ ..... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{AP}$, em função de y ..... 2 pontos

Escrever a equação $20=\sqrt{20}\times\sqrt{20+y^2}\times\frac{1}{2}$ (ou equivalente) ..... 3 pontos

Obter o valor de y $(\sqrt{60})$ ..... 3 pontos

VERSÃO DE TRABALHO

6. ..... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ ..... 2 pontos

Obter $f'(a)$ ..... 1 ponto

Determinar $g'(x)$ ..... 2 pontos

Determinar $g'\left(a+\frac{\pi}{6}\right)$ ..... 4 pontos

Escrever $g'\left(a+\frac{\pi}{6}\right)=3\cos\left(3\left(a+\frac{\pi}{6}\right)\right)$ ..... 1 ponto

Escrever $3\cos\left(3\left(a+\frac{\pi}{6}\right)\right)=3\cos\left(3a+\frac{\pi}{2}\right)$ ..... 1 ponto

Concluir que $3\cos\left(3a+\frac{\pi}{2}\right)=-3\,\text{sen}\,(3a)$ ..... 2 pontos

Escrever $f'(a)=-\frac{1}{g'\left(a+\frac{\pi}{6}\right)}$ (ou equivalente) ..... 2 pontos

Concluir que $\text{sen}^2(3a)=\frac{1}{9}$ ..... 1 ponto

Concluir que $\text{sen}\,(3a)=-\frac{1}{3}$ (**ver nota**) ..... 3 pontos

Nota – Se, na resposta, não for referido que $3a\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$ (ou equivalente), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

VERSÃO DE TRABALHO

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ..... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1. ..... 15 pontos

2.

2.1. ..... 15 pontos

2.2. ..... 15 pontos

3.

3.1. ..... 10 pontos

3.2. ..... 15 pontos

4.

4.1. ..... 15 pontos

4.2. ..... 15 pontos

4.3. ..... 15 pontos

5.

5.1. ..... 5 pontos

5.2. ..... 10 pontos

5.3. ..... 15 pontos

6. ..... 15 pontos

160 pontos

TOTAL ..... **200 pontos**

VERSÃO DE TRABALHO