



EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/2.ª Fase

14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2015

VERSÃO 1

Página em branco

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis e, a seguir, passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As citações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$$\frac{\alpha r^2}{2} (\alpha - \text{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; } r - \text{raio})$$

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume do cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Probabilidades

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$
$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

Página em branco

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. A tabela de distribuição de probabilidades de uma certa variável aleatória X é

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	a	$2a$	0,4

(a designa um número real)

Qual é o valor médio desta variável aleatória?

- (A) 2,1 (B) 2,2 (C) 2,3 (D) 2,4

2. Um saco contém nove bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9. As bolas numeradas de 1 a 5 são pretas e as restantes são brancas.

Retira-se, ao acaso, uma bola do saco e observa-se a sua cor e o seu número.

Considere os seguintes acontecimentos, associados a esta experiência aleatória:

A : «a bola retirada é preta»

B : «o número da bola retirada é um número par»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

- (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{3}{4}$

3. Para certos valores de a e de b ($a > 1$ e $b > 1$), tem-se $\log_b a = \frac{1}{3}$

Qual é, para esses valores de a e de b , o valor de $\log_a (a^2 b)$?

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) 2 (D) 5

4. Para um certo número real k , é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 + e^{x+k} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{2x + \ln(x+1)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

- (A) 0
- (B) 1
- (C) $\ln 2$
- (D) $\ln 3$

5. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3 \sin^2(x)$

Qual das expressões seguintes define a função f'' , segunda derivada de f ?

- (A) $6 \sin(2x) \cos(x)$
- (B) $6 \sin(x) \cos(2x)$
- (C) $6 \cos(2x)$
- (D) $6 \sin(2x)$

6. Na Figura 1, está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero $[OAB]$

Sabe-se que:

- o ponto O é a origem do referencial;
- o ponto A pertence ao eixo real e tem abcissa igual a 1
- o ponto B pertence ao quarto quadrante e é a imagem geométrica de um complexo z

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $z = \sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{11\pi}{6}$
- (B) $z = \operatorname{cis} \frac{11\pi}{6}$
- (C) $z = \sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$
- (D) $z = \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$

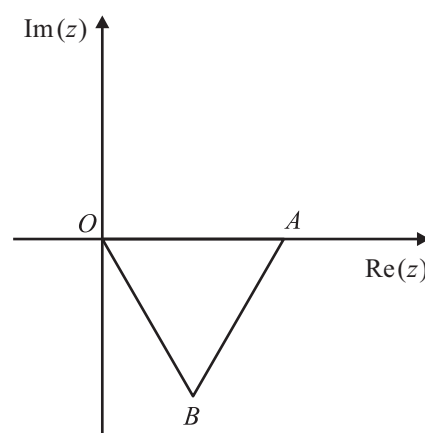


Figura 1

7. Considere, num referencial o.n. xOy , a circunferência definida pela equação

$$x^2 + (y - 1)^2 = 2$$

Esta circunferência intersecta o eixo Ox em dois pontos. Destes pontos, seja A o que tem abcissa positiva.

Seja r a reta tangente à circunferência no ponto A

Qual é a equação reduzida da reta r ?

(A) $y = x + 1$

(B) $y = x - 1$

(C) $y = 2x + 2$

(D) $y = 2x - 2$

8. Qual das expressões seguintes é termo geral de uma sucessão monótona e limitada?

(A) $(-1)^n$

(B) $(-1)^n \cdot n$

(C) $-\frac{1}{n}$

(D) $1 + n^2$

Página em branco

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{12}}$

Determine os números complexos z que são solução da equação $z^4 = \overline{z_1}$, sem utilizar a calculadora.

Apresente esses números na forma trigonométrica.

2. Um cubo encontra-se em movimento oscilatório provocado pela força elástica exercida por uma mola.

A Figura 2 esquematiza esta situação. Nesta figura, os pontos O e A são pontos fixos. O ponto P representa o centro do cubo e desloca-se sobre a semirreta $\vec{OA}$

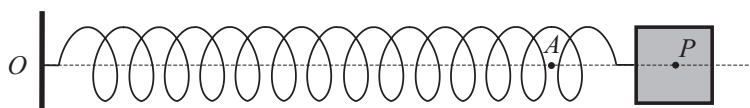


Figura 2

Admita que não existe qualquer resistência ao movimento.

Sabe-se que a distância, em metros, do ponto P ao ponto O é dada por

$$d(t) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo ($t \in [0, +\infty[$).

Resolva os itens 2.1. e 2.2. sem recorrer à calculadora.

- 2.1. No instante em que se iniciou a contagem do tempo, o ponto P coincidia com o ponto A

Durante os primeiros três segundos do movimento, o ponto P passou pelo ponto A mais do que uma vez.

Determine os instantes, diferentes do inicial, em que tal aconteceu.

Apresente os valores exatos das soluções, em segundos.

- 2.2. Justifique, recorrendo ao teorema de Bolzano, que houve, pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O foi igual a 1,1 metros.

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + xe^x & \text{se } x \leq 3 \\ \ln(x-3) - \ln(x) & \text{se } x > 3 \end{cases}$

Resolva os itens 3.1., 3.2. e 3.3., recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

3.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

3.2. Resolva, em $]-\infty, 3]$, a condição $f(x) - 2x > 1$

Apresente o conjunto solução, usando a notação de intervalos de números reais.

3.3. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa 4

4. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que:

- f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio;
- $f'(0) > 0$
- $f''(x) < 0$, para qualquer $x \in]-\infty, 0[$

Nenhum dos gráficos a seguir apresentados é o gráfico da função f

Gráfico A

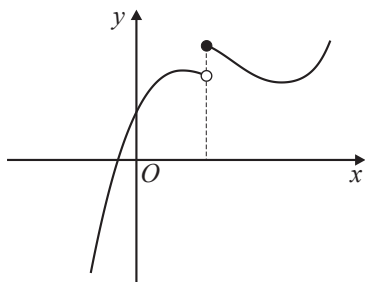


Gráfico B

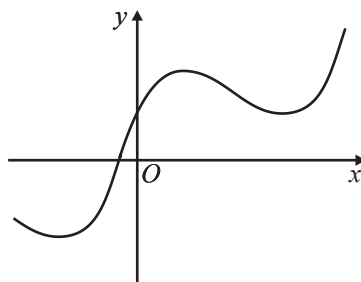
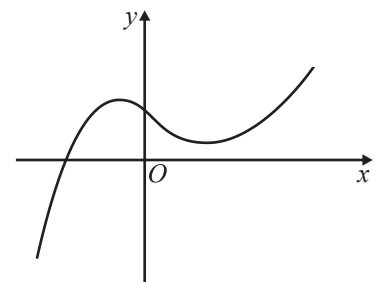


Gráfico C



Elabore uma composição na qual apresente, para cada um dos gráficos, uma razão pela qual esse gráfico não pode ser o gráfico da função f

5. Seja Ω , conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(A) \neq 0$

Prove que $P(A \cup \overline{B}) - 1 + P(B) = P(A) \times P(B|A)$

6. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[NOPQRSTU]$ que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular. Sabe-se que:

- o vértice P pertence ao eixo Ox
- o vértice N pertence ao eixo Oy
- o vértice T pertence ao eixo Oz
- o vértice R tem coordenadas $(2, 2, 2)$
- o plano PQV é definido pela equação $6x + z - 12 = 0$

6.1. Determine as coordenadas do ponto V

6.2. Escreva uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta OR

6.3. Seja A um ponto pertencente ao plano QRS

Sabe-se que:

- o ponto A tem cota igual ao cubo da abscissa;
- os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares.

Determine a abscissa do ponto A , recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s) (sugere-se a utilização da janela de visualização em que $x \in [-4, 4]$ e $y \in [-2, 7]$);
- apresente a abscissa do ponto A arredondada às centésimas.

6.4. Dispõe-se de sete cores diferentes, das quais uma é branca e outra é azul, para colorir as nove faces do poliedro $[NOPQRSTU]$. Cada face vai ser colorida com uma única cor.

Considere a experiência aleatória que consiste em colorir, ao acaso, as nove faces do poliedro, podendo cada face ser colorida por qualquer uma das sete cores.

Determine a probabilidade de, no final da experiência, o poliedro ficar com exatamente duas faces brancas, ambas triangulares, exatamente duas faces azuis, ambas quadradas, e as restantes faces coloridas com cores todas diferentes.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas de milésima.

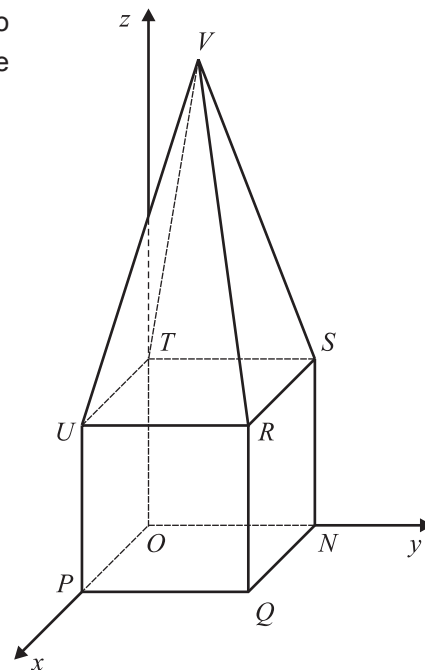


Figura 3

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a 8..... (8 × 5 pontos)	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.	15 pontos
2.	
2.1.	10 pontos
2.2.	15 pontos
3.	
3.1.	15 pontos
3.2.	15 pontos
3.3.	15 pontos
4.	15 pontos
5.	15 pontos
6.	
6.1.	5 pontos
6.2.	10 pontos
6.3.	15 pontos
6.4.	15 pontos
	160 pontos

TOTAL		200 pontos
--------------------	-------	-------------------



EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/2.ª Fase

Critérios de Classificação

11 Páginas

2015

VERSÃO DE TRABALHO

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização da linguagem científica adequada.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam a realização de cálculos.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado, que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	B	D	A	C	D	B	C
Versão 2	C	C	A	B	D	C	D	B

GRUPO II

1. **15 pontos**

Escrever $-1 + i$ na forma trigonométrica 3 pontos

Indicar o módulo 1 ponto

Indicar um argumento 2 pontos

Escrever z_1 na forma trigonométrica 3 pontos

Obter o módulo 1 ponto

Obter um argumento 2 pontos

Obter $\bar{z}_1$ na forma trigonométrica 2 pontos

Escrever $z = \text{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{4}$ (com $k \in \{0, 1, 2, 3\}$), sendo θ um argumento de $\bar{z}_1$ 3 pontos

Obter as soluções da equação $\left(\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right), \text{cis}\frac{\pi}{3}, \text{cis}\frac{5\pi}{6}, \text{cis}\frac{4\pi}{3} \right)$.. (1+1+1+1) ... 4 pontos

2.1. **10 pontos**

Determinar $d(0)$ 1 ponto

Equacionar o problema $(d(t) = d(0))$ 2 pontos

Obter a expressão geral das soluções da equação $d(t) = d(0)$ 3 pontos

Determinar as soluções da equação $d(t) = d(0)$ pertencentes ao intervalo $]0, 3]$ 3 pontos

Responder ao problema $\left(\frac{2}{3}s, 2s \text{ e } \frac{8}{3}s\right)$ 1 ponto

2.2. 15 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Referir que a função d é contínua em $[3, 4]$ (ver notas 1 e 2)	2 pontos
Calcular $d(3)$	4 pontos
Calcular $d(4)$	4 pontos
Escrever $d(3) < 1,1 < d(4)$ (ou equivalente)	4 pontos
Concluir o pretendido	1 ponto

2.º Processo

Referir que $d(t) = 1,1$ é equivalente a $d(t) - 1,1 = 0$	1 ponto
Referir que a função f , definida por $f(t) = d(t) - 1,1$, é contínua em $[3, 4]$ (ver notas 1 e 2)	2 pontos
Calcular $f(3)$	4 pontos
Calcular $f(4)$	4 pontos
Referir que $f(3)$ e $f(4)$ têm sinais contrários (ou equivalente)	2 pontos
Concluir que a função f tem, pelo menos, um zero em $]3, 4[$	1 ponto
Concluir o pretendido	1 ponto

Notas:

1. Se apenas for referido que a função é contínua, esta etapa deve ser considerada como cumprida.
2. Se for referido que a função é contínua em $]3, 4[$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

3.1. 15 pontos

Determinar $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	8 pontos
Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + xe^x)$	1 ponto
Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + xe^x) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x)$	1 ponto
Escrever $1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y})$ (ver nota) ...	2 pontos
Escrever $1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y}) = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y}{e^y}$	1 ponto
Escrever $1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y}{e^y} = 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}}$	1 ponto
Reconhecer o limite notável $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	1 ponto
Obter $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (1)	1 ponto

Concluir que a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico da função f , quando $x \rightarrow -\infty$ 1 ponto

Determinar $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 5 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x-3) - \ln(x))$ 1 ponto

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x-3) - \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x-3}{x} \right)$ 2 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x-3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(1 - \frac{3}{x} \right) \right)$ 1 ponto

Obter $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (0) 1 ponto

Concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico da função f , quando $x \rightarrow +\infty$ 1 ponto

Nota – Se for referido que $x \rightarrow -\infty$ é equivalente a $-x \rightarrow +\infty$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

3.2. **15 pontos**

Escrever $f(x) - 2x > 1 \Leftrightarrow 1 + xe^x - 2x > 1$ 1 ponto

Escrever $1 + xe^x - 2x > 1 \Leftrightarrow xe^x - 2x > 0$ 1 ponto

Escrever $xe^x - 2x > 0 \Leftrightarrow x(e^x - 2) > 0$ (**ver nota 1**) 3 pontos

Apresentar um quadro de sinais (ou equivalente) (**ver notas 2 e 3**) 6 pontos

Apresentar o conjunto solução $(]-\infty, 0[\cup]\ln 2, 3])$ (**ver notas 4 e 5**) 4 pontos

Notas:

1. Se a resposta apresentar $xe^x > 2x \Leftrightarrow e^x > 2$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. A apresentação de um quadro de sinais com $x \in]-\infty, +\infty[$ não implica qualquer desvalorização nesta etapa.
3. Se a resposta apresentar apenas a resolução da inequação $e^x > 2$, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é de 2 pontos.
4. Se não for considerada a condição $x \in]-\infty, 3]$, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 2 pontos.
5. Se o conjunto solução apresentado resultar da resolução da inequação $e^x > 2$, em vez de resultar da resolução da inequação $x(e^x - 2) > 0$, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é de 2 pontos.

3.3. 15 pontos

Identificar o declive da reta pedida com $f'(4)$ (ver nota) 2 pontos

Determinar $f'(4)$ 7 pontos

Obter uma expressão de $f'(x)$ 4 pontos

Obter $f'(4)$ 3 pontos

Calcular $f(4)$ 2 pontos

Escrever a equação reduzida da reta pedida $\left(y = \frac{3}{4}x - 3 - \ln 4\right)$ 4 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

4. 15 pontos

Tópicos de resposta:

- Apresentação de uma razão que permita rejeitar o gráfico **A** (como a função f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio, ela é contínua em todo o seu domínio, o que não acontece com a função representada neste gráfico) (ver nota).
- Apresentação de uma razão que permita rejeitar o gráfico **B** (como, em $]-\infty, 0[$, $f''(x) < 0$, o gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo naquele intervalo, o que não acontece com a função representada neste gráfico).
- Apresentação de uma razão que permita rejeitar o gráfico **C** (como $f'(0) > 0$, o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0 é positivo, o que não acontece com a função representada neste gráfico).

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
6	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	15
5	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	13
4	Na resposta, são contemplados apenas dois dos três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	10
3	Na resposta, são contemplados apenas dois dos três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	8
2	Na resposta, é contemplado apenas um tópico, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	5
1	Na resposta, é contemplado apenas um tópico, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	3

Nota – Se não for explicitada a relação entre a derivabilidade e a continuidade, considera-se que este tópico não foi contemplado.

5.		15 pontos
Aplicar a propriedade da probabilidade da união de dois acontecimentos	3 pontos	
Aplicar a propriedade da probabilidade do acontecimento contrário	2 pontos	
Aplicar a propriedade da probabilidade da intersecção de um acontecimento com o contrário de outro acontecimento	3 pontos	
Utilizar a fórmula da probabilidade condicionada	2 pontos	
Concluir que a igualdade é verdadeira	5 pontos	
6.1.		5 pontos
Reconhecer que o ponto V tem abcissa 1	1 ponto	
Escrever a equação $6 + z - 12 = 0$ (ou equivalente)	2 pontos	
Obter o valor de z	1 ponto	
Indicar as coordenadas do ponto V $((1, 1, 6))$	1 ponto	
6.2.		10 pontos
Escrever as coordenadas do ponto P	1 ponto	
Escrever $\overrightarrow{OR} = (2, 2, 2)$	2 pontos	
Escrever a equação $2x + 2y + 2z + d = 0$ (ou equivalente)	3 pontos	
Determinar o valor de d	2 pontos	
Apresentar uma equação cartesiana do plano pedido ($x + y + z - 2 = 0$ ou equivalente)	2 pontos	
6.3.		15 pontos
Reconhecer que o ponto A tem coordenadas da forma $(x, 2, x^3)$	2 pontos	
Identificar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$ com as do ponto A	1 ponto	
Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{TQ}$	2 pontos	
Escrever $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{TQ}$, em função de x	1 ponto	
Equacionar o problema	2 pontos	
Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora, que permite(m) resolver a equação (ver nota)	3 pontos	
Apresentar a abcissa do ponto A $(1, 52)$	4 pontos	

Nota – Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

6.4. 15 pontos

Reconhecer que o número de casos possíveis é 7^9 (ver nota 1) 6 pontos

Reconhecer que o número de casos favoráveis é ${}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!$ (ver nota 2) 8 pontos

Obter a probabilidade pedida (0,0002) (ver nota 3) 1 ponto

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a 7^9 , a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. A expressão que dá o número de casos favoráveis é o produto das expressões 4C_2 , 5C_2 e $5!$. Por cada expressão incorreta ou não apresentada devem ser descontados 4 pontos. A mesma desvalorização deve ser feita caso seja considerada, uma ou mais vezes, uma operação diferente da multiplicação. Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, esta etapa deve ser pontuada com 0 pontos.
3. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiver sido pontuada com 0 pontos, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos. A pontuação de 0 pontos também deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0, 1]$

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a 8. (8 × 5 pontos) 40 pontos
40 pontos

GRUPO II

1. 15 pontos

2.

2.1. 10 pontos

2.2. 15 pontos

3.

3.1. 15 pontos

3.2. 15 pontos

3.3. 15 pontos

4.

..... 15 pontos

5.

..... 15 pontos

6.

6.1. 5 pontos

6.2. 10 pontos

6.3. 15 pontos

6.4. 15 pontos

160 pontos

TOTAL 200 pontos