EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática B

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 735/1.ª Fase

15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2015

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente feitos a lápis e a seguir passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Na resposta aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos e mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α *– amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α *– amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r *– raio da base;* g *– geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r *– raio*)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r *– raio da base;* g *– geratriz*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r *– raio*)

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

GRUPO I

Desde muito cedo que o Dinis procura fazer economias, quer poupando, quer investindo as suas poupanças para as rentabilizar.

1. Recentemente, o Dinis decidiu investir parte das suas poupanças em dois produtos financeiros: o *X-fin* e o *Y-fin*.

O Dinis espera vir a ter um lucro anual de 30 euros por cada milhar de euros investido no produto *X-fin* e um lucro anual de 50 euros por cada milhar de euros investido no produto *Y-fin*.

Tendo em conta as suas poupanças, o Dinis impôs os seguintes limites de investimento anual: poderá investir até 4000 euros no produto *X-fin* e poderá investir até 6000 euros no produto *Y-fin*.

O Dinis tem o seguinte sistema de pontuação anual de risco de investimento:

- atribuir 3 pontos de risco de investimento por cada milhar de euros investido no produto *X-fin*;
- atribuir 2 pontos de risco de investimento por cada milhar de euros investido no produto *Y-fin*;
- não ultrapassar 18 pontos de risco de investimento, no total.

Determine o número, x, de milhares de euros que o Dinis deve investir no produto *X-fin* e o número, y, de milhares de euros que o Dinis deve investir no produto *Y-fin*, de modo a maximizar o lucro anual.

Na sua resposta, apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

2. No dia em que fez dezasseis anos, o Dinis decidiu iniciar uma poupança.

Pensou em duas hipóteses diferentes de a fazer:

- colocar 2 euros num mealheiro vazio e, todos os meses, a partir desse dia, colocar no mealheiro mais 1 euro do que a quantia colocada no mês anterior;
- colocar 15 euros num mealheiro vazio e, todos os meses, a partir desse dia, voltar a colocar 15 euros no mealheiro.

O objetivo do Dinis era juntar, pelo menos, 500 euros.

Qual das duas hipóteses permite concretizar este objetivo mais rapidamente?

Justifique a sua resposta.

3. Quando o Dinis completou o ensino secundário, os pais e os avós deram-lhe algum dinheiro.

O Dinis decidiu rentabilizar esse dinheiro num depósito a prazo, obtendo juros, num regime de juro composto. Neste regime, o juro relativo a um determinado período de tempo é capitalizado, ou seja, é adicionado ao capital existente no início desse período de tempo. Constitui-se, assim, um novo capital, o qual, por sua vez, vai render mais juros, de forma continuada.

Por exemplo: um capital inicial de 100 euros, a uma taxa de juro anual de 2%, com capitalizações anuais, passado um ano, perfaz o capital de 102 euros; passados dois anos, perfaz o capital de $104{,}04$ euros; passados três anos, perfaz o capital de cerca de $106{,}12$ euros; e assim sucessivamente.

Depois de se informar em várias instituições bancárias, o Dinis depositou o dinheiro que tinha recebido dos pais e dos avós numa conta a prazo com uma taxa de juro anual de $1{,}50\%$, com capitalizações anuais.

O Dinis fez alguns cálculos e verificou, corretamente, que, nas condições referidas, seis anos após a data de abertura da conta, o correspondente capital iria perfazer cerca de $1530{,}82$ euros.

Determine a quantia que o Dinis recebeu dos pais e dos avós quando completou o ensino secundário.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

GRUPO II

O crescimento de uma criança ou de um adolescente é um importante indicador do seu desenvolvimento, pelo que parâmetros como a altura e o peso* são periodicamente monitorizados.

* A palavra «peso» é utilizada na sua aceção corrente como sinónimo de massa.

1. A Laura nasceu no dia 1 de junho de 1998.

Admita que, entre os 2 e os 20 anos de idade, o peso da Laura, P, em quilogramas, é dado, em função do tempo, t, aproximadamente, por

$$P(t) = \frac{70}{1 + 8{,}5\, e^{-0{,}22t}} \qquad \text{para } 2 \leq t \leq 20$$

A variável t representa o tempo decorrido, em anos, após o dia 1 de junho de 1998.

Por exemplo, $P(2)$ é, aproximadamente, o peso da Laura, em quilogramas, no dia 1 de junho de 2000.

1.1. Determine, de acordo com o modelo apresentado, durante quanto tempo o peso da Laura esteve compreendido entre 30 e 40 quilogramas, inclusive.

Apresente o resultado em anos e meses, com o número de meses arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1.2. No Boletim de Saúde Infantil e Juvenil, usado em Portugal, são apresentadas curvas de crescimento relativas a crianças e a adolescentes.

Na Figura 1, apresenta-se uma das curvas que constam num boletim e que relaciona a altura, em **centímetros**, com a idade, em anos, de raparigas, dos 5 aos 19 anos de idade.

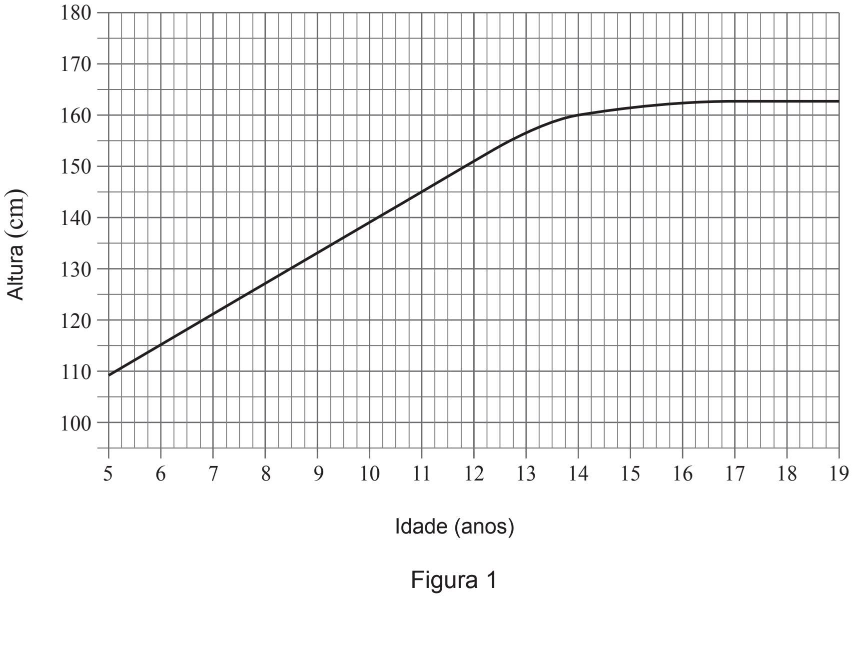

Figura 1

O índice de massa corporal, IMC, é um dos indicadores utilizados para monitorizar o estado de nutrição de uma criança ou de um adolescente. O IMC é dado por

$$IMC = \frac{peso}{(altura)^2}$$

com o peso em quilogramas e a altura em **metros**.

Admita que a altura da Laura, entre os 5 e os 19 anos de idade, é bem modelada pela curva apresentada na Figura 1.

Determine, de acordo com os modelos apresentados, o IMC da Laura no dia 1 de junho de 2012.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. O André também nasceu no dia 1 de junho de 1998.

Na tabela seguinte, apresentam-se registos da altura do André em determinadas idades.

Idade (meses)	72	96	114	120	132	156	180	204	222
Altura (cm)	116,0	127,3	135,2	137,8	143,1	156,0	169,0	175,2	176,4

Admita que a relação entre a altura do André, y, em centímetros, e a sua idade, x, em meses, é bem modelada por uma função logarítmica definida por uma expressão do tipo

$$y = a + b \ln x \quad \text{para} \quad 70 \leq x \leq 225$$

e em que a e b são parâmetros constantes.

Estime a altura do André no dia 1 de dezembro de 2014.

Apresente o resultado em centímetros, arredondado às décimas.

Na sua resposta:

– recorra à calculadora e utilize a regressão logarítmica para obter uma expressão da função logarítmica que melhor se ajusta aos dados da tabela;

– apresente o valor de a e o valor de b, arredondados às milésimas.

GRUPO III

Numa aula de preparação para o exame de Matemática B, o professor propôs aos alunos atividades destinadas à revisão de diversos conteúdos.

1. Numa das atividades, o professor apresentou os conjuntos I, II, III e IV, cada um com quatro polígonos, alguns dos quais sombreados. Esses conjuntos estão representados na Figura 2.

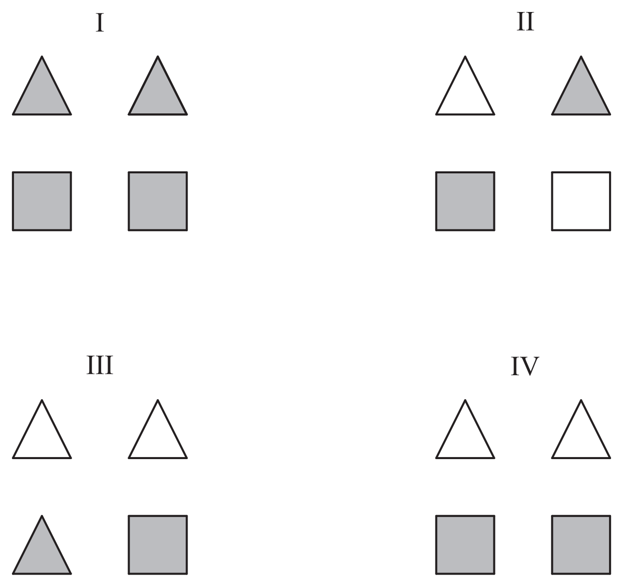

Figura 2

De seguida, o professor apresentou o seguinte problema:

«Estou a pensar num destes quatro conjuntos. Se eu escolher, ao acaso, um polígono do conjunto em que estou a pensar, verifica-se que:

- é tão provável escolher um quadrado como um triângulo;
- o acontecimento "o polígono escolhido está sombreado" não é o acontecimento certo;
- a probabilidade de escolher um quadrado, de entre os polígonos sombreados, é $\frac{1}{2}$

Qual é o conjunto em que estou a pensar?»

Um dos alunos respondeu, corretamente, que o professor estava a pensar no conjunto II.

Numa pequena composição, apresente, para cada um dos conjuntos I, III e IV, a razão pela qual o professor não poderia estar a pensar nesse conjunto.

Na sua resposta, **não** se refira ao conjunto II.

2. Na Figura 3, está representada uma construção geométrica que o professor usou como base para as atividades de revisão. Nesta construção:

- $[OPQR]$ é um quadrado;
- os pontos A, B, C, D, E, F, G e H pertencem aos lados desse quadrado;
- $[OAIH]$ e $[BPCJ]$ são quadrados geometricamente iguais;
- os pontos L e K pertencem à reta GD, que é paralela à reta OP
- $[GLF]$ e $[KDE]$ são triângulos isósceles geometricamente iguais;
- $\overline{GL} = \overline{KD} = \overline{OA}$
- $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{OA}$
- $\overline{RF} = \overline{EQ} = \frac{1}{2}\overline{OA}$

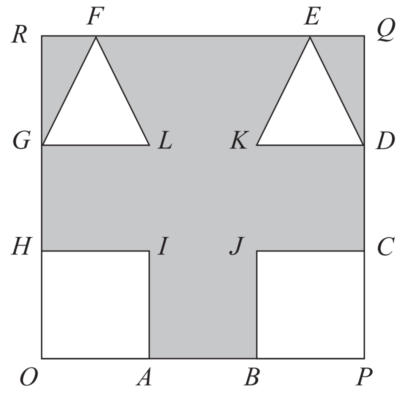

Figura 3

2.1. Mostre que, na construção representada na Figura 3, a área da região sombreada é exatamente igual ao dobro da área da região não sombreada, qualquer que seja o valor de $\overline{OP}$

2.2. Na construção representada na Figura 3, fixou-se um referencial ortogonal e monométrico, xOy, com origem no ponto O, como se ilustra na Figura 4.

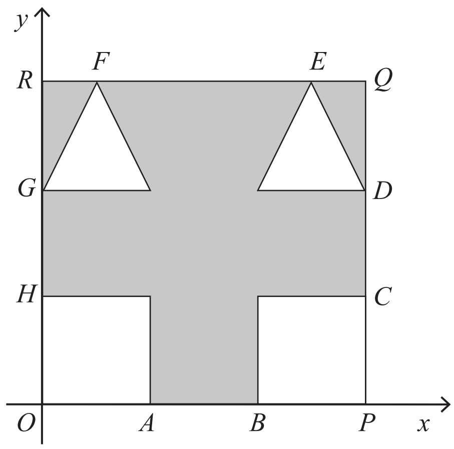

Figura 4

Os segmentos de reta $[OP]$ e $[OR]$ estão contidos nos semieixos positivos Ox e Oy, respetivamente.

Admita que o ponto P tem coordenadas $(3, 0)$

2.2.1. Identifique as coordenadas do ponto simétrico do ponto P em relação à reta OQ

2.2.2. Determine a equação reduzida da reta BC

Na sua resolução, comece por indicar as coordenadas dos pontos B e C

3. Na Figura 5, apresenta-se o diagrama de extremos e quartis relativo ao tempo que os 28 alunos da turma demoraram a realizar as atividades propostas na aula de preparação para o exame.

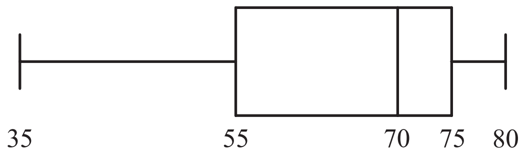

Figura 5

Neste diagrama, os valores indicados, em minutos, correspondem aos extremos e aos quartis.

Admita que nenhum aluno demorou exatamente 70 minutos a realizar as atividades.

Quantos alunos demoraram mais do que 70 minutos a terminar as atividades propostas na aula?

Justifique a sua resposta.

GRUPO IV

No seu movimento em torno do Sol, os planetas descrevem órbitas elípticas, pelo que a distância de cada planeta ao Sol varia ao longo do tempo.

Na órbita de um planeta, o afélio é o ponto em que o planeta se encontra a maior distância do Sol e o periélio é o ponto em que o planeta se encontra a menor distância do Sol.

Na Figura 6, apresenta-se um esquema, que não está à escala, da órbita do planeta Saturno, em que:

- o ponto E representa o Sol;
- o ponto A representa o afélio de Saturno;
- o ponto P representa o periélio de Saturno;
- o ponto S representa a posição de Saturno na sua órbita, num dado instante;
- o ponto E pertence à reta AP
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado AES, cujo lado origem é a semirreta $\dot{E}A$ e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{E}S$, com $x \in [0, 2\pi[$

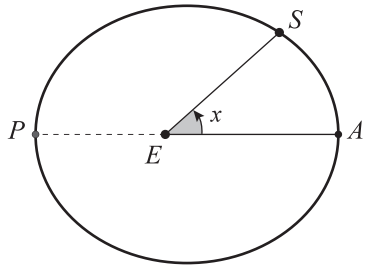

Figura 6

Admita que a distância, d, em milhões de quilómetros, de Saturno ao Sol é dada, em função de x, aproximadamente, por

$$d(x) = \frac{1429}{1 - 0{,}055723\cos(x)} \qquad \text{com } x \in [0, 2\pi[$$

1. De acordo com o modelo apresentado, determine $\overline{AP}$, a distância entre o afélio e o periélio de Saturno.

Apresente o resultado, em milhões de quilómetros, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Justifique que, para qualquer valor de x pertencente ao intervalo $]0, \pi[$, se verifica a igualdade

$$d(2\pi - x) = d(x)$$

3. Considere a função, V, que dá a taxa de variação instantânea da função d, para cada valor de x pertencente ao intervalo $[0, 2\pi[$

Interprete, no contexto descrito, o significado de $V\left(\frac{5\pi}{16}\right) \approx -70{,}5$

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	30 pontos
2.	15 pontos
3.	10 pontos
	55 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.	15 pontos
	45 pontos

GRUPO III

1.	20 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	
2.2.1.	5 pontos
2.2.2.	10 pontos
3.	10 pontos
	60 pontos

GRUPO IV

1.	20 pontos
2.	10 pontos
3.	10 pontos
	40 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática B

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 735/1.ª Fase

Critérios de Classificação

14 Páginas

2015

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens com cotação igual ou superior a 20 pontos e que envolvam a produção de um texto tem em conta a clareza, a organização dos conteúdos e a utilização do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos processos de resolução, termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.

Situação	Classificação
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.

Situação	Classificação
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos, no máximo, dois pontos à soma das pontuações atribuídas.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. .... **30 pontos**

Identificar a função objetivo $(L = 30x + 50y)$ .... 1 ponto

Identificar as restrições (**ver nota 1**) .... 11 pontos

$x \leq 4$ (**ver notas 2** e **3**) .... 3 pontos

$y \leq 6$ (**ver notas 2** e **3**) .... 3 pontos

$3x + 2y \leq 18$ (**ver notas 2** e **3**) .... 3 pontos

$x \geq 0$ .... 1 ponto

$y \geq 0$ .... 1 ponto

Representar graficamente a região admissível .... 7 pontos

Representar graficamente a reta de equação $x = 4$ .... 1 ponto

Representar graficamente a reta de equação $y = 6$ .... 1 ponto

Representar graficamente a reta de equação $3x + 2y = 18$ .... 2 pontos

Assinalar o polígono .... 3 pontos

Calcular o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema .... 11 pontos

Obter as coordenadas dos vértices do polígono que não pertencem aos eixos coordenados $((4, 3)$ e $(2, 6))$ .... (2 + 2) .... 4 pontos

Obter as coordenadas dos vértices do polígono que pertencem aos eixos coordenados, com exceção da origem $((4, 0)$ e $(0, 6))$ .... (1 + 1) .... 2 pontos

Calcular o valor da função objetivo em cada um dos vértices do polígono da região admissível (ou aplicar o método da paralela à reta de nível zero) (**ver notas 4** e **5**) .... 4 pontos

Identificar os valores pedidos (2 milhares de euros a investir no produto *X-fin* e 6 milhares de euros a investir no produto *Y-fin*) ..... 1 ponto

Notas:

1. Se, em alguma das condições, for utilizado incorretamente apenas o símbolo «$<$», em vez do símbolo «$\leq$», ou o símbolo «$>$», em vez do símbolo «$\geq$», a pontuação a atribuir a esta etapa deverá ser desvalorizada em 1 ponto, no total.

2. Se, na condição, for utilizado incorretamente apenas o símbolo «$=$», em vez do símbolo «$\leq$», a pontuação a atribuir a este passo deverá ser desvalorizada em 1 ponto.

3. Se, na condição, for utilizado incorretamente apenas o símbolo «$\geq$», em vez do símbolo «$\leq$», a pontuação a atribuir a este passo deverá ser desvalorizada em 2 pontos.

4. Deverá ser atribuído 1 ponto ao cálculo do valor da função objetivo em cada um dos vértices do polígono que define a região admissível, com exceção da origem.

5. No caso de ser aplicado o método da paralela à reta de nível zero e se apenas for representada, corretamente, esta reta, a pontuação a atribuir a este passo deverá ser 2 pontos.

2. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que, relativamente à primeira hipótese, as quantias colocadas mensalmente no mealheiro são termos consecutivos de uma progressão aritmética, em que o primeiro termo é 2 e a razão é 1 .... 1 ponto

Escrever o termo geral dessa progressão $(n+1$ ou equivalente$)$ .... 1 ponto

Reconhecer que, passados $n-1$ meses desde o dia inicial da poupança, a quantia existente no mealheiro corresponde à soma de n termos consecutivos dessa progressão .... 1 ponto

Escrever uma expressão da soma de n termos consecutivos dessa progressão $\left(\frac{2+n+1}{2} \times n\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ .... 1 ponto

Escrever $\frac{2+n+1}{2} \times n \geq 500$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Resolver a condição anterior .... 3 pontos

Reconhecer que, relativamente à segunda hipótese, passados $n-1$ meses desde o dia inicial da poupança, a quantia existente no mealheiro é termo de uma progressão aritmética, em que o primeiro termo é 15 e a razão é 15 .... 2 pontos

Escrever o termo geral dessa progressão $(15n$ ou equivalente$)$ .... 1 ponto

Escrever $15n \geq 500$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Resolver a condição anterior .... 1 ponto

Concluir que a primeira hipótese é a que permite concretizar o objetivo mais rapidamente .... 2 pontos

2.º Processo

Calcular, relativamente à primeira hipótese, a quantia existente no mealheiro em cada mês até perfazer uma quantia igual ou superior a 500 euros.................. 5 pontos

Obter o número mínimo necessário de meses para perfazer aquela quantia .... 3 pontos

Calcular, relativamente à segunda hipótese, a quantia existente no mealheiro em cada mês, até perfazer uma quantia igual ou superior a 500 euros .... 3 pontos

Obter o número mínimo necessário de meses para perfazer aquela quantia .... 2 pontos

Concluir que a primeira hipótese é a que permite concretizar o objetivo mais rapidamente .... 2 pontos

3. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que o capital correspondente a cada ano é termo de uma progressão geométrica .... 1 ponto

Obter a razão dessa progressão $(1{,}015)$ .... 3 pontos

Escrever uma expressão, em função do capital inicial, C, que permita calcular o capital correspondente ao sexto ano $\left(C \times 1{,}015^6 \text{ ou equivalente}\right)$ .... 2 pontos

Igualar a expressão anterior a $1530{,}82$ .... 2 pontos

Obter o valor de C (**ver nota**) .... 1 ponto

Apresentar o valor pedido .... 1 ponto

Nota – Pode ser apresentado um valor compreendido entre $1399{,}999$ e $1400{,}568$, de acordo com os arredondamentos efetuados em cálculos intermédios.

2.º Processo

Reconhecer que, até ao quinto ano, o capital correspondente a cada ano se pode obter dividindo o capital correspondente ao ano seguinte por $1{,}015$ .... 3 pontos

Obter os capitais correspondentes ao quinto ano, ao quarto ano, ao terceiro ano, ao segundo ano e ao primeiro ano .... (1 × 5) .... 5 pontos

Obter o capital inicial $(1399{,}9994\ldots)$ .... 1 ponto

Apresentar o valor pedido (**ver nota**).. 1 ponto

Nota – Se for apresentado o valor 1421 euros, arredondamento do capital correspondente ao primeiro ano, a pontuação a atribuir a esta etapa deverá ser 0 pontos.

GRUPO II

1.1. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Reconhecer que o problema se pode traduzir pela condição $30 \leq P(t) \leq 40$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Representar graficamente a função P .... 2 pontos

- Respeitar a forma do gráfico .... 1 ponto
- Respeitar o domínio .... 1 ponto

Representar graficamente a reta de equação $y = 30$ .... 1 ponto

Assinalar o ponto de intersecção da reta de equação $y = 30$ com o gráfico de P 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto de intersecção $(8{,}41992\ldots)$ .... 2 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = 40$ .... 1 ponto

Assinalar o ponto de intersecção da reta de equação $y = 40$ com o gráfico de P 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto de intersecção $(11{,}03521\ldots)$ .... 2 pontos

Calcular a diferença entre as abcissas dos dois pontos de intersecção $(2{,}61529...)$ 1 ponto

Converter o valor obtido em anos e meses .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido (2 anos e 7 meses) .... 1 ponto

2.º Processo

Reconhecer que o problema se pode traduzir pela condição $30 \leq P(t) \leq 40$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Resolver a condição $P(t) \geq 30$ .... 5 pontos

Obter $70 \geq 30 + 255 \times e^{-0,22t}$ .... 1 ponto

Obter $\frac{40}{255} \geq e^{-0,22t}$ .... 1 ponto

Obter $\ln\left(\frac{40}{255}\right) \geq -0,22t$ .... 2 pontos

Obter $t \geq 8,41992\ldots$ .... 1 ponto

Resolver a condição $P(t) \leq 40$ .... 5 pontos

Obter $70 \leq 40 + 340 \times e^{-0,22t}$ .... 1 ponto

Obter $\frac{30}{340} \leq e^{-0,22t}$ .... 1 ponto

Obter $\ln\left(\frac{30}{340}\right) \leq -0,22t$ .... 2 pontos

Obter $t \leq 11,03521\ldots$ .... 1 ponto

Calcular a diferença entre $11,03521\ldots$ e $8,41992\ldots$ $(2,61529\ldots)$ .... 1 ponto

Converter o valor obtido em anos e meses .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido (2 anos e 7 meses) .... 1 ponto

3.º Processo

Reconhecer que o problema se pode traduzir pela condição $30 \leq P(t) \leq 40$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Resolver a condição $P(t) = 30$ .... 4 pontos

Obter $70 = 30 + 255 \times e^{-0,22t}$ .... 1 ponto

Obter $\frac{40}{255} = e^{-0,22t}$ .... 1 ponto

Obter $\ln\left(\frac{40}{255}\right) = -0,22t$ .... 1 ponto

Obter $t = 8,41992\ldots$ .... 1 ponto

Resolver a condição $P(t) = 40$ .... 4 pontos

Obter $70 = 40 + 340 \times e^{-0,22t}$ .... 1 ponto

Obter $\frac{30}{340} = e^{-0,22t}$ .... 1 ponto

Obter $\ln\left(\frac{30}{340}\right) = -0,22t$ .... 1 ponto

Obter $t = 11,03521\ldots$ .... 1 ponto

Referir que a função P é estritamente crescente (**ver nota**) .... 2 pontos

Calcular a diferença entre $11,03521\ldots$ e $8,41992\ldots$ $(2,61529\ldots)$ .... 1 ponto

Converter o valor obtido em anos e meses .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido (2 anos e 7 meses) .... 1 ponto

Nota – Se for referido apenas que a função P é crescente, a pontuação a atribuir a esta etapa não deverá ser desvalorizada.

1.2. .... **15 pontos**

Identificar o dia 1 de junho de 2012 com $t = 14$ .... 2 pontos

Obter $P(14)$ .... 4 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Representar graficamente a função P .... 2 pontos

Respeitar a forma do gráfico .... 1 ponto

Respeitar o domínio .... 1 ponto

Assinalar o ponto do gráfico de abcissa 14 .... 1 ponto

Obter a ordenada desse ponto $(50{,}3360\ldots)$ .... 1 ponto

2.º Processo

Substituir t por 14 na expressão de $P(t)$ .... 2 pontos

Obter o valor de $P(14)$ .... 2 pontos

3.º Processo

Apresentar a linha da tabela da função P relevante para a resolução do problema .... 4 pontos

Identificar a altura estimada da Laura aos 14 anos (160 cm) .... 3 pontos

Converter 160 cm em metros .... 1 ponto

Apresentar uma expressão para o valor do IMC da Laura .... 3 pontos

Obter o valor pedido $(19{,}7)$ .... 2 pontos

2. .... **15 pontos**

Apresentar as listas introduzidas na calculadora .... 1 ponto

Apresentar o valor de a $(-140{,}125)$ .... 3 pontos

Apresentar o valor de b $(58{,}744)$ .... 3 pontos

Determinar o número de meses decorridos entre o dia 1 de junho de 1998 e o dia 1 de dezembro de 2014 (198) (**ver nota**) .... 3 pontos

Obter o valor pedido $(170{,}5)$ .... 5 pontos

Nota – Se for apresentado o valor 192, em vez do valor 198, a pontuação a atribuir a esta etapa deverá ser 1 ponto.

GRUPO III

1. .... **20 pontos**

Tópicos de resposta:

- apresentar a razão pela qual o professor não poderia estar a pensar no conjunto I;
- apresentar a razão pela qual o professor não poderia estar a pensar no conjunto III;
- apresentar a razão pela qual o professor não poderia estar a pensar no conjunto IV.

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
6	Na resposta, são apresentados os três tópicos, de forma clara e organizada e com vocabulário específico adequado.	20
5	Na resposta, são apresentados os três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização do vocabulário específico.	17
4	Na resposta, apenas são apresentados dois tópicos, de forma clara e organizada e com vocabulário específico adequado.	14
3	Na resposta, apenas são apresentados dois tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização do vocabulário específico.	11
2	Na resposta, apenas é apresentado um tópico, de forma clara e organizada e com vocabulário específico adequado.	8
1	Na resposta, apenas é apresentado um tópico, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização do vocabulário específico.	5

Exemplo de resposta:

O professor não poderia estar a pensar no conjunto I, porque todos os polígonos estão sombreados neste conjunto; logo, o acontecimento “o polígono escolhido está sombreado” é o acontecimento certo.

O professor não poderia estar a pensar no conjunto III, porque há mais triângulos do que quadrados neste conjunto; logo, é mais provável o polígono ser um triângulo do que ser um quadrado.

Finalmente, o professor também não poderia estar a pensar no conjunto IV, porque, sabendo-se que o polígono está sombreado, a probabilidade de ser um quadrado, neste conjunto, é 1, uma vez que ambos os polígonos sombreados são quadrados.

2.1. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Subdividir o quadrado $[OPQR]$ em nove quadrados geometricamente iguais ..... 3 pontos

Referir que a soma das áreas dos dois triângulos não sombreados é igual à área de um desses nove quadrados .... 4 pontos

Referir que a área da região não sombreada da figura corresponde à soma das áreas de três dos nove quadrados .... 3 pontos

Referir que a área da região sombreada da figura corresponde à soma das áreas de seis dos nove quadrados .... 3 pontos

Concluir o pretendido .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever, em função de $\overline{OP}$, uma expressão da área do quadrado $[OPQR]$ ...... 2 pontos

Escrever, em função de $\overline{OP}$, uma expressão da área de um quadrado de lado $\overline{OA}$ .... 2 pontos

Escrever, em função de $\overline{OP}$, uma expressão da área de um dos triângulos não sombreados .... 3 pontos

Escrever, em função de $\overline{OP}$, uma expressão da área da região não sombreada .. 3 pontos

Reconhecer que a área do quadrado $[OPQR]$ é o triplo da área da região não sombreada (ou obter uma expressão, em função de $\overline{OP}$, da área da região sombreada) .... 3 pontos

Concluir o pretendido .... 2 pontos

2.2.1. .... **5 pontos**

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
2	Na resposta, são identificadas as coordenadas $(0, 3)$	5
1	Na resposta, apenas se reconhece que o ponto simétrico do ponto P em relação à reta OQ é o ponto R	3

2.2.2. .... **10 pontos**

Indicar as coordenadas do ponto B $\left((2, 0)\right)$ .... 1 ponto

Indicar as coordenadas do ponto C $\left((3, 1)\right)$ .... 1 ponto

Obter o declive da reta BC (1) .... 3 pontos

Obter a ordenada na origem da reta BC (-2) .... 3 pontos

Escrever a equação reduzida da reta BC $(y = x - 2)$ .... 2 pontos

3. .... **10 pontos**

Reconhecer que a mediana da distribuição é 70 minutos .... 4 pontos

Referir que metade dos alunos demoraram mais do que 70 minutos a realizar as atividades .... 4 pontos

Obter o valor pedido $(14$ alunos$)$ .... 2 pontos

GRUPO IV

1. .... **20 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar a distância do afélio de Saturno ao Sol com $d(0)$ (**ver nota**) .... 3 pontos

Calcular $d(0)$ .... 4 pontos

Identificar a distância do periélio de Saturno ao Sol com $d(\pi)$ .... 4 pontos

Calcular $d(\pi)$ .... 4 pontos

Reconhecer que $\overline{AP}$ é igual a $d(0)+d(\pi)$ .... 3 pontos

Calcular $d(0)+d(\pi)$ .... 1 ponto

Apresentar o valor pedido (2867) .... 1 ponto

Nota – Se a distância for identificada com $\frac{1429}{1-0{,}055723\cos(2\pi)}$, a pontuação a atribuir a esta etapa não deverá ser desvalorizada.

2.º Processo

Identificar a distância do afélio de Saturno ao Sol com o valor máximo da função d 2 pontos

Identificar a distância do periélio de Saturno ao Sol com o valor mínimo da função d 2 pontos

Representar graficamente a função d .... 5 pontos

- Respeitar a forma do gráfico .... 3 pontos
- Respeitar o domínio da função (**ver nota**) .... 2 pontos

Assinalar o ponto do gráfico cuja ordenada é o valor máximo da função d .... 1 ponto

Obter a ordenada desse ponto $(1513{,}3271...)$ .... 2 pontos

Assinalar o ponto do gráfico cuja ordenada é o valor mínimo da função d .... 1 ponto

Obter a ordenada desse ponto $(1353{,}5747...)$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\overline{AP}$ é igual à soma dos valores obtidos .... 3 pontos

Calcular essa soma $(2866{,}9018...)$ .... 1 ponto

Apresentar o valor pedido (2867) .... 1 ponto

Nota – Se for considerado o intervalo $[0, 2\pi]$ ou o intervalo $]0, 2\pi]$, a pontuação a atribuir a este passo não deverá ser desvalorizada.

2. .... **10 pontos**

Escrever $d(2\pi - x) = \frac{1429}{1-0{,}055723\cos(2\pi - x)}$ .... 3 pontos

Referir que $\cos(2\pi - x) = \cos(-x)$ (**ver nota**) .... 3 pontos

Referir que $\cos(-x) = \cos(x)$ (**ver nota**) .... 3 pontos

Concluir que $d(2\pi - x) = d(x)$ .... 1 ponto

Nota – Se esta igualdade não for referida, mas se for reconhecida no círculo trigonométrico, a pontuação a atribuir a esta etapa não deverá ser desvalorizada.

3. .... **10 pontos**

Tópicos de resposta:

- referir que Saturno está na posição correspondente a um ângulo de amplitude $\frac{5\pi}{16}$ radianos;
- referir que a distância de Saturno ao Sol está a diminuir;
- referir que $70{,}5$ é um valor aproximado correspondente à taxa de $70{,}5$ milhões de quilómetros por radiano (**ver notas 1, 2** e **3**).

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
3	Na resposta, são apresentados corretamente os três tópicos.	10
2	Na resposta, apenas são apresentados corretamente dois dos três tópicos.	7
1	Na resposta, apenas é apresentado corretamente um dos três tópicos.	4

Notas:

1. Se for omitido que $70{,}5$ é um valor aproximado, a pontuação a atribuir à resposta não deverá ser desvalorizada.
2. Se for omitido que $70{,}5$ corresponde a uma taxa, a pontuação a atribuir à resposta não deverá ser desvalorizada.
3. Se for referido «$-70{,}5$», em vez de «$70{,}5$», a pontuação a atribuir à resposta deverá ser desvalorizada em 1 ponto.

Exemplo de resposta:

Quando Saturno, na sua órbita, está na posição correspondente a um ângulo de amplitude $\frac{5\pi}{16}$ *radianos, a sua distância ao Sol está a diminuir à taxa de cerca de* $70{,}5$ *milhões de quilómetros por radiano.*

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	30 pontos
2.	15 pontos
3.	10 pontos
	55 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.	15 pontos
	45 pontos

GRUPO III

1.	20 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	
2.2.1.	5 pontos
2.2.2.	10 pontos
3.	10 pontos
	60 pontos

GRUPO IV

1.	20 pontos
2.	10 pontos
3.	10 pontos
	40 pontos

TOTAL .... **200 pontos**