GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática B

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 735/2.ª Fase 15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2015

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente feitos a lápis e a seguir passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Na resposta aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos e mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – *raio*)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – *raio*)

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Página em branco

GRUPO I

Existem, desde a antiguidade, referências a devastações de culturas agrícolas causadas por pragas de gafanhotos.

Numa determinada região do Norte de África, em 2004, foi localizado um enxame de gafanhotos.

1. Admita que o número, G, em milhões, de gafanhotos existentes no enxame, x semanas após as zero horas do dia em que este foi localizado, é dado, aproximadamente, por

$$G(x) = 0{,}9(x + 0{,}5)^3 e^{-0{,}6x} \quad \text{com } x \geq 0$$

1.1. Mostre que, de acordo com o modelo apresentado, o número de gafanhotos existentes onze semanas após as zero horas do dia em que o enxame foi localizado era inferior, em cerca de $2{,}37$ milhões de indivíduos, ao número de gafanhotos existentes duas semanas após as zero horas do mesmo dia.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

1.2. Determine durante quanto tempo o número de gafanhotos existentes no enxame foi superior a 6 milhões de indivíduos.

Apresente o resultado em dias, arredondado às unidades.

Na sua resolução, recorra às potencialidades gráficas da sua calculadora.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2. Admita que a área, A, em centenas de km^2, da zona agrícola afetada pelo enxame de gafanhotos, x semanas após as zero horas do dia em que este foi localizado, é dada, aproximadamente, por

$$A(x) = \frac{12}{1 + 9{,}5\, e^{-0{,}5x}} \quad \text{com } x \geq 0$$

2.1. Com o decorrer do tempo, e de acordo com o modelo apresentado, poderá a área da zona agrícola afetada pelo enxame de gafanhotos atingir $1400\ \text{km}^2$?

Justifique a sua resposta.

2.2. Considere a função, T, que dá a taxa de variação instantânea da função A, para cada valor de x

Interprete, no contexto descrito, o significado de $T(6) \approx 1{,}3$

GRUPO II

O reservatório de um parque industrial tem a forma de um tronco de cone, tal como o que se apresenta na Figura 1.

Admita que o reservatório tem $11{,}2$ metros de altura e que as suas superfícies circulares, na base e no topo, têm de raio, respetivamente, 15 metros e $6{,}6$ metros.

Foi construída uma maquete do reservatório com $11{,}2\ \text{cm}$ de altura e com $15\ \text{cm}$ de raio da base inferior.

Para construir essa maquete, efetuou-se um corte, num cone de revolução, por um plano paralelo à base, como sugere o esquema da Figura 2, que não está desenhado à escala. Neste esquema, h representa a altura do cone que se obteve a partir do corte efetuado e cuja base tem $6{,}6\ \text{cm}$ de raio.

Figura 1

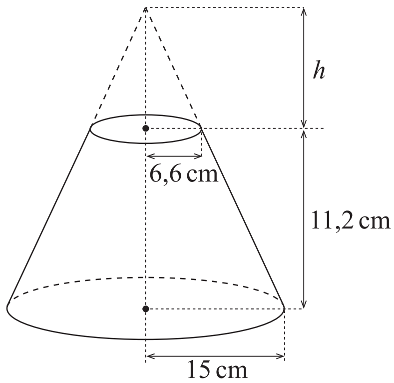

Figura 2

1. Mostre que o valor exato de h é $8{,}8\ \text{cm}$

Na sua resposta, poderá ser-lhe útil considerar a semelhança de triângulos.

2. Aquando das obras de manutenção do parque industrial, foi pintada toda a superfície lateral exterior do reservatório.

Determine a área da superfície pintada do reservatório, sabendo que a área lateral do cone de revolução, antes de se efetuar o corte, é, aproximadamente, $1178\ \text{cm}^2$

Apresente o resultado em metros quadrados, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

3. Na superfície lateral do reservatório, foram pintadas 27 circunferências, de espessura desprezável, contidas em planos paralelos equidistantes, como o esquema da Figura 3 ilustra.

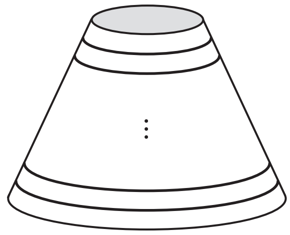

Figura 3

A Figura 4 apresenta a vista de cima do reservatório, na qual estão representadas, no mesmo plano, algumas dessas circunferências.

Sabe-se que a menor circunferência pintada no reservatório tem $6{,}9\ \mathrm{m}$ de raio e que cada circunferência, da menor para a maior, tem mais $0{,}3\ \mathrm{m}$ de raio do que a circunferência anterior.

Os perímetros das 27 circunferências pintadas no reservatório, da menor para a maior, são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

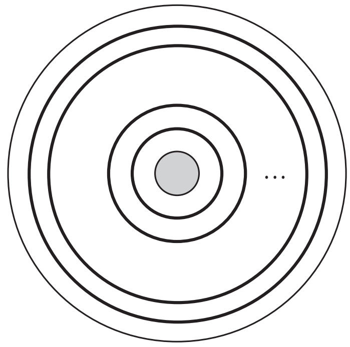

Figura 4

3.1. Mostre que a razão dessa progressão é exatamente $0{,}6\,\pi$ metros.

3.2. Determine a soma dos perímetros das 27 circunferências pintadas no reservatório.

Apresente o resultado em metros, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4. Admita que, no cone de revolução representado no esquema da Figura 2, se fixa um referencial ortogonal e monométrico, $Oxyz$, em que:

- a origem do referencial, O, coincide com o centro da base;
- o semieixo positivo das cotas é a semirreta $\dot{O}V$, sendo V o vértice do cone.

A Figura 5 representa esse referencial fixado no cone de revolução.

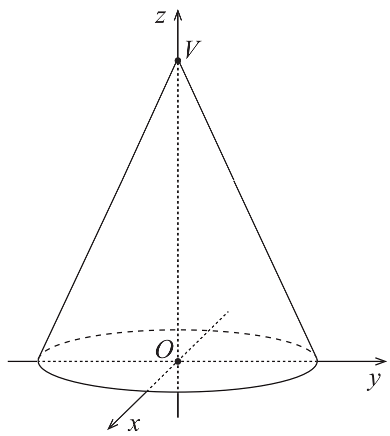

Figura 5

Neste referencial, o ponto V tem cota 20

Identifique as coordenadas do ponto simétrico do ponto V, relativamente ao plano xOy

GRUPO III

A Helena e o Samuel foram andar de baloiço no parque. Cada um deles escolheu um baloiço diferente.

1. Admita que, em cada instante, a distância do baloiço da Helena ao chão é medida a partir da extremidade inferior de uma das correntes que ligam o assento do baloiço à estrutura, conforme se ilustra na Figura 6.

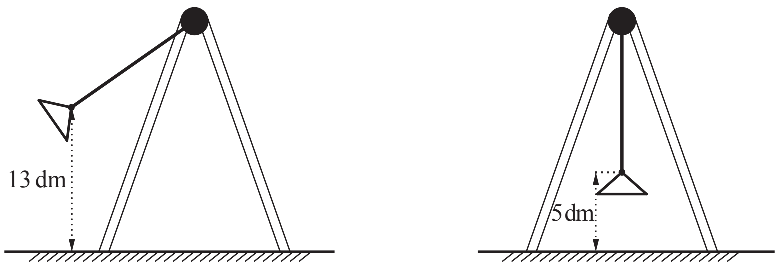

Figura 6

Nessa figura, encontram-se duas posições do baloiço da Helena no seu movimento: uma relativa à posição em que a distância do baloiço ao chão é máxima e a outra relativa à posição em que a distância do baloiço ao chão é mínima.

Na Figura 7, na qual se apresenta um esquema dessas duas posições, todos os pontos pertencem ao mesmo plano vertical. Os segmentos de reta $[AB]$ e $[AC]$ representam uma das correntes que ligam o assento do baloiço à estrutura nas duas posições referidas. A reta horizontal s representa o nível do chão.

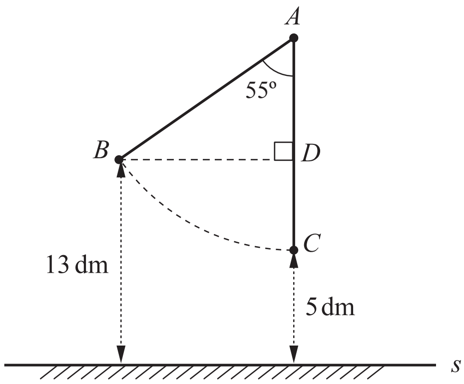

Figura 7

Sabe-se que:

- o ponto B dista $13\,\text{dm}$ da reta s
- o ponto C dista $5\,\text{dm}$ da reta s
- o ponto D é o ponto de $[AC]$, tal que $B\hat{D}A = 90^{\circ}$
- $B\hat{A}D = 55^{\circ}$

Determine o comprimento da corrente do baloiço.

Apresente o resultado em decímetros, arredondado às décimas.

Na sua resposta, tenha em consideração que $\overline{AB} = \overline{AC}$

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. A função H dá a distância, em decímetros, do baloiço da Helena ao chão t segundos após o início do movimento, com $0 \leq t \leq 18$

Na Figura 8, está representado o gráfico da função H

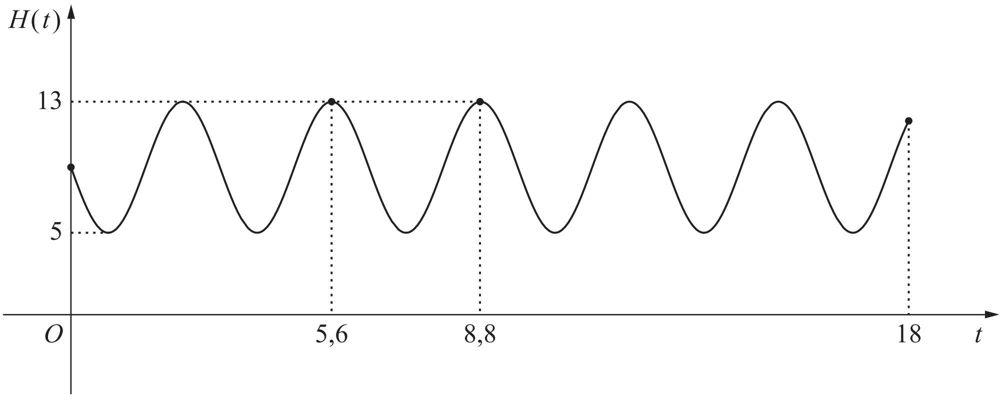

Figura 8

Tal como a figura ilustra:

- 5 e 13 são, respetivamente, o valor mínimo e o valor máximo absolutos da função H
- $5{,}6$ e $8{,}8$ são dois maximizantes consecutivos da função H

Admita que a função H pode ser definida por

$$H(t) = 9 - a\,\text{sen}(0{,}625\pi t) \quad \text{com } t \in [0; 18]$$

em que a é uma constante real positiva.

O argumento da função seno está em radianos.

Sabe-se que o Samuel e a Helena começaram a andar de baloiço com alguns segundos de diferença.

Admita que a distância, S, em decímetros, do baloiço do Samuel ao chão, t segundos depois de a Helena ter começado a andar de baloiço, é dada por

$$S(t) = H(t - 12) \quad \text{com } t \in [12; 30]$$

Elabore uma pequena composição, na qual:

– identifique, justificando, o valor de a na expressão analítica da função H

– interprete, no contexto descrito, o significado da igualdade $H(t + 3{,}2) = H(t)$, com $t \in [0; 14{,}8]$

– interprete, no contexto descrito, o significado do valor -12 na expressão analítica da função S

GRUPO IV

Em Portugal, durante o inverno, é frequente verificar-se a ocorrência de intempéries, com elevados valores de precipitação, que afetam de modo significativo as culturas agrícolas.

1. Os terrenos de produção agrícola de uma certa empresa situam-se numa região de Portugal habitualmente fustigada por intempéries. Devido aos prejuízos sofridos no presente ano agrícola, essa empresa decidiu candidatar-se a um subsídio governamental destinado à produção e a um subsídio europeu destinado à renovação de estruturas para o próximo ano agrícola.

Esses subsídios destinam-se ao cultivo de trigo e de vinha.

A empresa dispõe de uma área de 100 hectares de cultivo e tem a garantia de conseguir vender toda a produção obtida, em cada ano agrícola.

Para que qualquer dos subsídios seja atribuído à empresa, é exigido que:

- pelo menos 20 hectares de cultivo sejam de trigo;
- pelo menos 10 hectares de cultivo sejam de vinha.

O subsídio governamental, no valor total máximo de $150\,000$ euros, é de:

- 2000 euros por cada hectare de cultivo de trigo;
- 1000 euros por cada hectare de cultivo de vinha.

O subsídio europeu, no valor total máximo de $205\,000$ euros, é de:

- 3000 euros por cada hectare de cultivo de trigo;
- 1000 euros por cada hectare de cultivo de vinha.

No caso de receber os dois subsídios aos quais se candidata, prevê-se que a empresa obtenha o lucro anual de 1500 euros por cada hectare de trigo cultivado e o lucro anual de 3000 euros por cada hectare de vinha cultivada.

Determine a área, x, em hectares, que a empresa deve reservar para o cultivo de trigo e a área, y, em hectares, que a empresa deve reservar para o cultivo de vinha, referentes ao próximo ano agrícola, de modo que, caso receba os dois subsídios, a empresa obtenha, nesse ano, o lucro máximo.

Na sua resposta, apresente:

– a função objetivo;
– as restrições do problema;
– uma representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições;
– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

2. Uma das estações meteorológicas em que se registam os valores mais elevados de precipitação total anual em Portugal é a de Viana do Castelo.

2.1. Ao ler o diário que escreveu ao longo de um determinado ano dos seus tempos de juventude, a Edite encontrou, na página relativa a um dos primeiros quinze dias do mês de dezembro desse ano, passados em Viana do Castelo, a seguinte frase:

Esta manhã, o vento parou de soprar, mas está a chover.

Sabe-se que, nos primeiros quinze dias desse mês de dezembro, não choveu em Viana do Castelo apenas em cinco dias.

O estado do tempo em Viana do Castelo, nesse período, está ilustrado na Figura 9.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

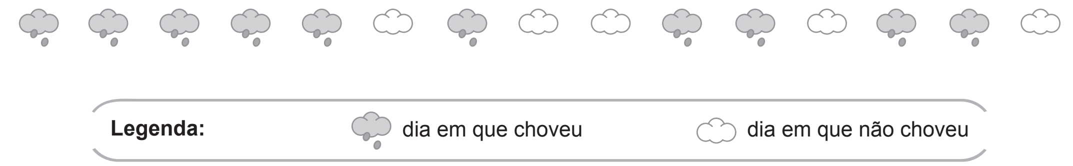

Figura 9

Qual é a probabilidade de ter chovido no dia seguinte ao dia em que foi escrita a frase encontrada pela Edite?

Na sua resposta, identifique os dias do mês que correspondem aos casos possíveis e os dias do mês que correspondem aos casos favoráveis.

2.2. Relativamente aos valores de precipitação total anual registados na estação meteorológica de Viana do Castelo, no período 2010-2013, verifica-se que:

- a média dos valores de precipitação total anual, nesses quatro anos, é $1270{,}125\ \mathrm{mm}$ e a mediana é $1314{,}350\ \mathrm{mm}$
- desses quatro anos, 2012 foi o ano de menor precipitação total anual e 2013 foi o ano de maior precipitação total anual.

Determine a média, em mm, dos valores de precipitação total anual dos últimos dois anos desse período de tempo, 2012 e 2013.

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1.

- **1.1.** .... 15 pontos
- **1.2.** .... 20 pontos

2.

- **2.1.** .... 10 pontos
- **2.2.** .... 10 pontos

55 pontos

GRUPO II

1. .... 10 pontos

2. .... 15 pontos

3.

- **3.1.** .... 10 pontos
- **3.2.** .... 15 pontos

4. .... 5 pontos

55 pontos

GRUPO III

1. .... 10 pontos

2. .... 20 pontos

30 pontos

GRUPO IV

1. .... 30 pontos

2.

- **2.1.** .... 15 pontos
- **2.2.** .... 15 pontos

60 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática B

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 735/2.ª Fase

Critérios de Classificação

13 Páginas

2015

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens com cotação igual ou superior a 20 pontos e que envolvam a produção de um texto tem em conta a clareza, a organização dos conteúdos e a utilização do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos processos de resolução, termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.

Situação	Classificação
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.

Situação	Classificação
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos, no máximo, dois pontos à soma das pontuações atribuídas.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1.1. .... **15 pontos**

Identificar $G(11)$ com o número de gafanhotos existentes onze semanas após o dia em que o enxame foi localizado .... 2 pontos

Obter $G(11)$ .... 3 pontos

Identificar $G(2)$ com o número de gafanhotos existentes duas semanas após o dia em que o enxame foi localizado .... 2 pontos

Obter $G(2)$ .... 3 pontos

Obter $G(11)-G(2)$ (ou $G(2)-G(11)$) .... 4 pontos

Concluir o pretendido .... 1 ponto

1.2. .... **20 pontos**

Reconhecer que o problema se pode traduzir pela condição $G(x)>6$ .... 1 ponto

Representar graficamente a função G .... 5 pontos

- Respeitar a forma do gráfico .... 3 pontos
- Utilizar um intervalo $I \subset \mathbb{R}_0^+$ relevante para a resolução do problema .... 2 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y=6$ .... 2 pontos

Assinalar os pontos de intersecção da reta de equação $y=6$ com o gráfico de G 2 pontos

Obter as abcissas desses pontos de intersecção ($2{,}785...$ e $6{,}727...$) .... (2 + 2) .... 4 pontos

Calcular a diferença entre essas abcissas $(3{,}942...)$ .... 3 pontos

Converter semanas em dias $(27{,}594...)$ .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido (28 dias) .... 1 ponto

2.1. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Referir que a reta de equação $y=12$ é assíntota horizontal do gráfico de A ... 3 pontos

Referir que a função A é estritamente crescente (ou referir que é uma função logística) .... 2 pontos

Referir que a área da zona agrícola afetada não ultrapassará $1200\ \mathrm{km}^2$ (**ver nota**) 3 pontos

Concluir que a área da zona agrícola afetada não poderá atingir $1400\ \mathrm{km}^2$ .... 2 pontos

Nota – Se for referido $12\ \mathrm{km}^2$, em vez de $1200\ \mathrm{km}^2$, a pontuação a atribuir a esta etapa deverá ser 2 pontos.

2.º Processo

Reconhecer que $e^{-0,5x} > 0$ .... 2 pontos

Referir que $1 + 9,5\, e^{-0,5x} > 1$ .... 3 pontos

Referir que $A(x) < 12$ .... 3 pontos

Concluir que a área da zona agrícola afetada não poderá atingir $1400\ \mathrm{km}^2$ .... 2 pontos

3.º Processo

Reconhecer que 1400 corresponde a 14 centenas .... 1 ponto

Escrever a equação $A(x) = 14$ .... 2 pontos

Resolver a equação anterior .... 6 pontos

- Obter $1 + 9,5 e^{-0,5x} = \frac{12}{14}$ (ou equivalente) .... 1 ponto
- Obter $e^{-0,5x} = -\frac{2}{133}$ .... 3 pontos
- Reconhecer que a equação é impossível .... 2 pontos

Concluir que a área da zona agrícola afetada não poderá atingir $1400\ \mathrm{km}^2$ .... 1 ponto

2.2. .... **10 pontos**

Tópicos de resposta:

- referir que 6 corresponde a seis semanas após as zero horas do dia em que o enxame de gafanhotos foi localizado (**ver nota**);
- referir que a área da zona agrícola afetada pelo enxame estava a aumentar;
- referir que $1,3$ é um valor aproximado correspondente à taxa de $130\,\mathrm{km}^2$ por semana (ou equivalente).

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
3	Na resposta, são apresentados corretamente os três tópicos.	10
2	Na resposta, apenas são apresentados corretamente dois dos três tópicos.	7
1	Na resposta, apenas é apresentado corretamente um dos três tópicos.	4

Nota – Se for referido apenas «seis semanas após o dia em que o enxame de gafanhotos foi localizado», este tópico deve ser considerado como apresentado corretamente.

Exemplo de resposta:

Seis semanas após as zero horas do dia em que o enxame de gafanhotos foi localizado, a área da zona agrícola afetada pelo enxame de gafanhotos estava a aumentar à taxa de cerca de $1,3$ centenas de km^2 por semana.

GRUPO II

1. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que os dois cones são semelhantes .... 1 ponto

Reconhecer que a altura do cone de raio 15 é dada por $h+11{,}2$ .... 1 ponto

Estabelecer a proporção $\frac{h+11{,}2}{h}=\frac{15}{6{,}6}$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Determinar h .... 5 pontos

- Obter $6{,}6\,h + 73{,}92 = 15\,h$ .... 2 pontos
- Obter $8{,}4\,h = 73{,}92$ .... 2 pontos
- Concluir que $h = 8{,}8$ .... 1 ponto

2.º Processo

Reconhecer que os dois cones são semelhantes .... 1 ponto

Calcular a razão de semelhança entre os dois cones .... 2 pontos

Reconhecer que a altura do cone de raio 15 é dada por $h+11{,}2$ .... 1 ponto

Escrever $h+11{,}2\ = h\times\frac{15}{6{,}6}$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter $8{,}4\,h = 73{,}92$ .... 2 pontos

Concluir que $h = 8{,}8$ .... 1 ponto

2. .... **15 pontos**

Calcular a área lateral do cone de raio $6{,}6$ .... 10 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

- Aplicar o teorema de Pitágoras .... 4 pontos
- Obter a geratriz do cone .... 3 pontos
- Obter a área lateral do cone .... 3 pontos

2.º Processo

- Calcular a geratriz do cone de raio 15 .... 3 pontos
- Calcular a razão de semelhança entre os dois cones .... 2 pontos
- Calcular a geratriz do cone de raio $6{,}6$ .... 2 pontos
- Obter a área lateral do cone .... 3 pontos

3.º Processo

- Calcular a altura do cone de raio 15 .... 1 ponto
- Calcular a razão de semelhança entre os dois cones .... 2 pontos

Calcular a razão entre as áreas laterais dos dois cones .... 3 pontos

Obter a área lateral do cone .... 4 pontos

Calcular a diferença das áreas laterais dos dois cones .... 3 pontos

Apresentar o valor pedido (950 m^2) .... 2 pontos

3.1. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Referir que a diferença entre dois termos consecutivos de uma progressão aritmética é constante .... 1 ponto

Calcular o valor exato do perímetro da menor circunferência $(13{,}8\,\pi)$ .... 2 pontos

Obter o raio da circunferência imediatamente seguinte $(7{,}2)$ .... 1 ponto

Calcular o valor exato do perímetro dessa circunferência $(14{,}4\,\pi)$ .... 2 pontos

Escrever a subtração entre os dois valores obtidos .... 3 pontos

Obter $0{,}6\,\pi$ .... 1 ponto

2.º Processo

Reconhecer que os raios das circunferências, da menor para a maior, são termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão $0{,}3$ .... 1 ponto

Escrever o termo geral dessa progressão $(6{,}9 + (n-1) \times 0{,}3$ ou equivalente) 3 pontos

Determinar uma expressão que permita calcular o perímetro exato da circunferência de ordem n .... 5 pontos

Escrever $2\pi(6{,}9 + (n-1) \times 0{,}3)$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $0{,}6\pi n + 13{,}2\pi$ .... 3 pontos

Concluir que a razão é $0{,}6\,\pi$ .... 1 ponto

3.2. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Calcular o perímetro, P_1, da menor circunferência $(13{,}8\pi$ ou $43{,}3539\ldots)$.. 2 pontos

Determinar uma expressão de (P_n), em que P_n é o perímetro da circunferência de ordem n $(13{,}8\pi + (n-1) \times 0{,}6\pi$ ou equivalente$)$ .... 5 pontos

Calcular $P_{27}\,(29{,}4\pi$ ou $92{,}3628...)$ .... 3 pontos

Calcular a soma dos perímetros das 27 circunferências .... 4 pontos

- Escrever uma expressão correspondente a $\dfrac{P_1+P_{27}}{2} \times 27$ ...... 2 pontos
- Obter o valor da expressão anterior $(583{,}2\pi$ ou $1832{,}1768...)$ 2 pontos

Apresentar o valor pedido $(1832\ \text{m})$ .... 1 ponto

2.º Processo

Calcular o perímetro, P_1 , da menor circunferência $(13{,}8\ \pi$ ou $43{,}3539\ldots)$ .... 2 pontos

Calcular $P_2,\ P_3,\ P_4,\ \ldots\ ,\ P_{27}$ (**ver nota**) .... 8 pontos

Escrever $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots + P_{27}$ .... 1 ponto

Obter o valor da expressão anterior $(583{,}2\pi$ ou $1832{,}1768...)$ .... 3 pontos

Apresentar o valor pedido $(1832\ \text{m})$ .... 1 ponto

Nota – Deverão ser atribuídos 1 ponto pelo cálculo correto de P_2, 1 ponto pelo cálculo correto de P_{27} e 1 ponto pelo cálculo correto de cada conjunto de quatro valores relativos a $P_3 , \ldots , P_{26}$

4. .... **5 pontos**

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
2	Na resposta, são identificadas as coordenadas $(0, 0, -20)$	5
1	Na resposta, apenas são identificadas corretamente a abcissa e a ordenada pedidas. OU Na resposta, apenas é identificada corretamente a cota pedida.	2

GRUPO III

1. .... **10 pontos**

Escrever $\overline{AD}$ em função de $\overline{AB}$ .... 2 pontos

Obter $\overline{DC}$ (8) .... 1 ponto

Escrever $\overline{AD} = \overline{AB} - 8$ .... 1 ponto

Escrever $\cos 55^{\circ} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Substituir, na expressão anterior, $\overline{AD}$ por $\overline{AB} - 8$ .... 1 ponto

Obter $\overline{AB} = \dfrac{8}{1 - \cos 55^{\circ}}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter o valor pedido $(18{,}8\ \mathrm{dm})$ .... 2 pontos

2. .... **20 pontos**

Tópicos de resposta:

- identificar, justificando, o valor de a na expressão analítica da função H
- interpretar, no contexto descrito, o significado da igualdade $H(t+3{,}2) = H(t)$, com $t \in [0; 14{,}8]$
- interpretar, no contexto descrito, o significado do valor -12 na expressão analítica da função S

Níveis	**Descritores do nível de desempenho**	**Pontuação**
6	Na resposta, são apresentados os três tópicos, de forma clara e organizada e com vocabulário específico adequado.	20
5	Na resposta, são apresentados os três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização do vocabulário específico.	17
4	Na resposta, apenas são apresentados dois tópicos, de forma clara e organizada e com vocabulário específico adequado.	14
3	Na resposta, apenas são apresentados dois tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização do vocabulário específico.	11
2	Na resposta, apenas é apresentado um tópico, de forma clara e organizada e com vocabulário específico adequado.	8
1	Na resposta, apenas é apresentado um tópico, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização do vocabulário específico.	5

Exemplo de resposta:

A diferença entre o máximo e o mínimo da função H é $2a$; logo, $a = 4$, porque $\dfrac{13-5}{2} = 4$

A igualdade $H(t+3{,}2) = H(t)$ significa que, de $3{,}2$ em $3{,}2$ segundos, o baloiço da Helena estava à mesma distância do chão, desde o instante em que se iniciou o movimento até ao instante em que tinham passado $14{,}8$ segundos após o início do movimento.

O valor -12, na expressão analítica da função S, significa que o Samuel começou a andar de baloiço 12 segundos depois de a Helena ter começado.

GRUPO IV

1. .... **30 pontos**

Identificar a função objetivo $(L = 1500x + 3000y$ ou $L = 1{,}5x + 3y)$ .... 1 ponto

Identificar as restrições (**ver nota 1**) .... 11 pontos

- $x + y \leq 100$ (**ver notas 2** e **3**) .... 3 pontos
- $2000x + 1000y \leq 150\,000$ (**ver notas 2** e **3**) .... 3 pontos
- $3000x + 1000y \leq 205\,000$ (**ver notas 2** e **3**) .... 3 pontos
- $x \geq 20$ .... 1 ponto
- $y \geq 10$ .... 1 ponto

Representar graficamente a região admissível .... 7 pontos

- Representar graficamente a reta de equação $x + y = 100$ .... 1 ponto
- Representar graficamente a reta de equação $2x + y = 150$ .... 1 ponto
- Representar graficamente a reta de equação $3x + y = 205$ .... 1 ponto
- Representar graficamente a reta de equação $x = 20$ .... 1 ponto
- Representar graficamente a reta de equação $y = 10$ .... 1 ponto
- Assinalar o polígono .... 2 pontos

Calcular o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema .... 11 pontos

- Obter as coordenadas dos vértices que pertencem à reta de equação $x = 20$ ou à reta de equação $y = 10$ .... (1 + 1 + 1) .... 3 pontos
- Obter as coordenadas dos vértices que não pertencem às retas paralelas aos eixos coordenados .... (2 + 2) .... 4 pontos
- Calcular o valor da função objetivo em cada um dos vértices da região admissível (ou aplicar o método da paralela à reta de nível zero) (**ver notas 4** e **5**) .... 3 pontos
- Identificar os valores pedidos (20 hectares para o cultivo de trigo e 80 hectares para o cultivo de vinha) .... 1 ponto

Notas:

1. Se, em alguma das condições, for utilizado incorretamente apenas o símbolo «$<$», em vez do símbolo «$\leq$», ou o símbolo «$>$», em vez do símbolo «$\geq$», a pontuação a atribuir a esta etapa deverá ser desvalorizada em 1 ponto, no total.

2. Se, na condição, for utilizado incorretamente apenas o símbolo «=», em vez do símbolo «$\leq$», a pontuação a atribuir a este passo deverá ser desvalorizada em 1 ponto.

3. Se, na condição, for utilizado incorretamente apenas o símbolo «$\geq$», em vez do símbolo «$\leq$», a pontuação a atribuir a este passo deverá ser desvalorizada em 2 pontos.

4. Deverão ser atribuídos 1 ponto ao cálculo do valor da função objetivo em cada um dos vértices não contidos nas retas de equação $x = 20$ ou $y = 10$ e 1 ponto ao cálculo dos valores da função objetivo no conjunto dos restantes vértices.

5. No caso de ser aplicado o método da paralela à reta de nível zero e se apenas for representada, corretamente, esta reta, a pontuação a atribuir a este passo deverá ser 2 pontos.

2.1. .... **15 pontos**

Identificar os dias do mês que correspondem aos casos possíveis (dias em que choveu na véspera: $2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 14$ e 15) (**ver notas 1** e **2**) .... 5 pontos

Identificar os dias do mês que correspondem aos casos favoráveis (dias em que choveu e em que também choveu na véspera: $2, 3, 4, 5, 11$ e 14) (**ver nota 3**) .... (1 × 6) .... 6 pontos

Reconhecer que os casos possíveis são 10 .... 1 ponto

Reconhecer que os casos favoráveis são 6 .... 1 ponto

Apresentar a probabilidade pedida $\left(\frac{6}{10}\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ .... 2 pontos

Notas:

1. Deverá ser atribuído 1 ponto por cada conjunto de dois dias corretos.

2. Em alternativa, poderão ser identificados como casos possíveis os dias em que choveu: $1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 11, 13$ e 14.

3. No caso de terem sido identificados como casos possíveis os dias referidos na nota 2, podem ser identificados como casos favoráveis os dias referidos nesta etapa ou, em alternativa, os dias em que choveu e em que também choveu no dia seguinte: $1, 2, 3, 4, 10$ e 13.

2.2. .... **15 pontos**

Reconhecer que, na ordenação dos valores de precipitação total anual dos quatro anos do período 2010-2013, os valores correspondentes a 2010 e a 2011 ocupam as posições centrais .... 2 pontos

Reconhecer que a mediana é dada por $\frac{a+b}{2}$, em que $a+b$ é a soma dos valores de precipitação total anual de 2010 e de 2011 .... 2 pontos

Escrever $\frac{a+b}{2} = 1314{,}350$ .... 1 ponto

Obter $a+b = 2628{,}7$ .... 1 ponto

Escrever $\frac{a+b+c+d}{4} = 1270{,}125$, em que $c+d$ é a soma dos valores de precipitação total anual de 2012 e de 2013 .... 3 pontos

Substituir, na expressão anterior, $a+b$ por $2628{,}7$ .... 2 pontos

Obter $c+d = 2451{,}8$ .... 2 pontos

Apresentar a média pedida $(1225{,}9 \text{ mm})$ .... 2 pontos

COTAÇÕES

GRUPO I

1.

1.1. .... 15 pontos

1.2. .... 20 pontos

2.

2.1. .... 10 pontos

2.2. .... 10 pontos

55 pontos

GRUPO II

1. .... 10 pontos

2. .... 15 pontos

3.

3.1. .... 10 pontos

3.2. .... 15 pontos

4. .... 5 pontos

55 pontos

GRUPO III

1. .... 10 pontos

2. .... 20 pontos

30 pontos

GRUPO IV

1. .... 30 pontos

2.

2.1. .... 15 pontos

2.2. .... 15 pontos

60 pontos

TOTAL .... **200 pontos**