REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

# Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

**Prova 635/1.ª Fase** 14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

**2016**

## VERSÃO 1

Página em branco

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

# Formulário

## Geometria

**Comprimento de um arco de circunferência:**

$\alpha r$ ($\alpha$ – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ – raio)

**Área de um polígono regular:** *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

**Área de um sector circular:**

$\frac{\alpha r^2}{2}$ ($\alpha$ – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ – raio)

**Área lateral de um cone:** $\pi r g$ ($r$ – raio da base; $g$ – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:** $4\pi r^2$ ($r$ – raio)

**Volume de uma pirâmide:** $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

**Volume de um cone:** $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

**Volume de uma esfera:** $\frac{4}{3}\pi r^3$ ($r$ – raio)

## Progressões

Soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão $(u_n)$:

**Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

## Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

## Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se $X$ é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

## Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

## Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Página em branco

## GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

**1.** Seja $\Omega$, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam $A$ e $B$ dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = \frac{2}{5}$
- $P(B) = \frac{3}{10}$
- $P\left(A|B\right) = \frac{1}{6}$

Qual é o valor de $P\left(A \cup B\right)$ ?

**(A)** $\frac{4}{5}$ **(B)** $\frac{7}{10}$ **(C)** $\frac{13}{20}$ **(D)** $\frac{19}{30}$

**2.** Seja $X$ uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio $10$

Sabe-se que $P(7 < X < 10) = 0{,}3$

Qual é o valor de $P(X > 13)$ ?

**(A)** $0{,}1$ **(B)** $0{,}2$ **(C)** $0{,}3$ **(D)** $0{,}4$

**3.** Seja $a$ um número real diferente de $0$

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to a} \frac{a e^{x-a} - a}{x^2 - a^2}$ ?

**(A)** $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $1$ **(D)** $2$

**4.** Seja $f$ uma função de domínio $\mathbb{R}^-$

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x) + e^x - x}{x} = 1$
- o gráfico de $f$ tem uma assíntota oblíqua.

Qual é o declive dessa assíntota?

**(A)** $-2$ **(B)** $-1$ **(C)** $1$ **(D)** $2$

**5.** Na Figura 1, estão representados o círculo trigonométrico e um trapézio retângulo $[OPQR]$

Sabe-se que:

- o ponto $P$ tem coordenadas $(0,1)$
- o ponto $R$ pertence ao quarto quadrante e à circunferência.

Seja $\alpha$ a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo $Ox$ e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}R$

Qual das expressões seguintes dá a área do trapézio $[OPQR]$, em função de $\alpha$ ?

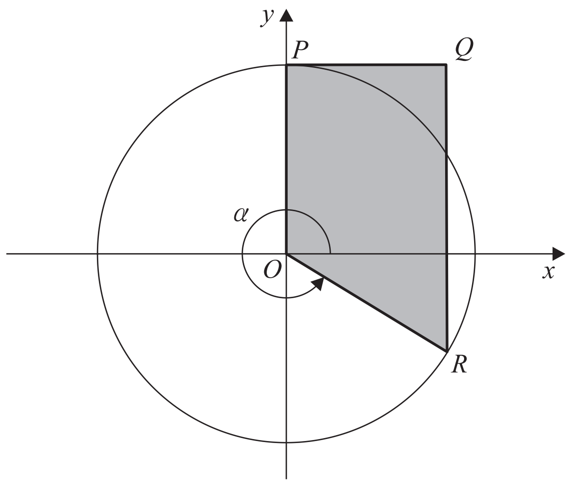

Figura 1

**(A)** $\dfrac{\cos\alpha}{2} + \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$ **(B)** $\dfrac{\cos\alpha}{2} - \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$

**(C)** $\cos\alpha + \dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{2}$ **(D)** $\cos\alpha - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{2}$

**6.** Seja $\theta$ um número real pertencente ao intervalo $\left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$

Considere o número complexo $z = -3\operatorname{cis}\theta$

A que quadrante pertence a imagem geométrica do complexo $z$ ?

**(A)** Primeiro **(B)** Segundo **(C)** Terceiro **(D)** Quarto

**7.** Na Figura 2, está representado um triângulo isósceles $[ABC]$

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{2}$
- $B\hat{A}C = 75^{\circ}$

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ?

**(A)** $\sqrt{2}$

**(B)** $2\sqrt{2}$

**(C)** $\sqrt{3}$

**(D)** $2\sqrt{3}$

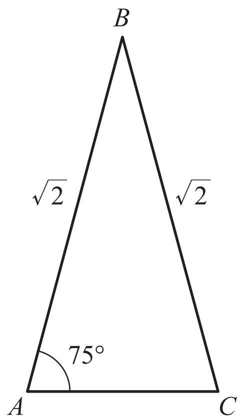

Figura 2

**8.** Considere as sucessões $(u_n)$ e $(v_n)$ de termos gerais

$u_n = \dfrac{kn+3}{2n}$ ($k$ é um número real) e $v_n = \ln\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$

Sabe-se que $\lim(u_n) = \lim(v_n)$

Qual é o valor de $k$ ?

**(A)** $1$ **(B)** $2$ **(C)** $e$ **(D)** $2e$

Página em branco

## GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

**1.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = \frac{8\operatorname{cis}\theta}{-1+\sqrt{3}\,i} \quad \text{e} \quad z_2 = \operatorname{cis}(2\theta)$$

Determine o valor de $\theta$ pertencente ao intervalo $]0,\pi[$, de modo que $\overline{z_1} \times z_2$ seja um número real.

**2.** Considere nove bolas, quatro numeradas com o número 1, quatro com o número 2 e uma com o número 4.

**2.1.** Colocam-se as nove bolas, que são indistinguíveis ao tato, num saco vazio. Em seguida, retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas desse saco.

Seja $X$ a variável aleatória: «produto dos números das duas bolas retiradas».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável $X$

Apresente as probabilidades na forma de fração irredutível.

**2.2.** Considere agora que se colocam as nove bolas lado a lado, de modo a formar um número com nove algarismos.

Quantos números ímpares diferentes se podem obter?

**3.** Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$

Sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ da pirâmide é paralela ao plano $xOy$
- o ponto $A$ tem coordenadas $(-1, 1, 1)$
- o ponto $C$ tem coordenadas $(-3, 3, 1)$
- o plano $BCV$ é definido pela equação $3y + z - 10 = 0$

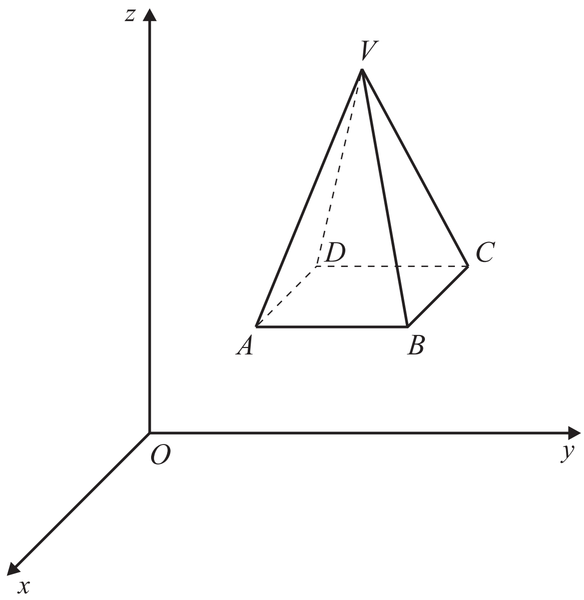


Figura 3

**3.1.** Escreva uma condição que defina a superfície esférica de centro no ponto $A$ e que é tangente ao plano $xOy$

**3.2.** Determine as coordenadas do ponto $V$

**3.3.** Seja $\alpha$ o plano perpendicular à reta $AC$ e que passa no ponto $P(1, -2, -1)$

A intersecção dos planos $\alpha$ e $BCV$ é uma reta.

Escreva uma equação vetorial dessa reta.

**4.** Num dia de vento, são observadas oscilações no tabuleiro de uma ponte suspensa, construída sobre um vale.

Mediu-se a oscilação do tabuleiro da ponte durante um minuto.

Admita que, durante esse minuto, a distância de um ponto $P$ do tabuleiro a um ponto fixo do vale é dada, em metros, por

$$h(t) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t) + t\,\text{sen}(2\pi t) \qquad (t \text{ é medido em minutos e pertence a } [0,1])$$

**4.1.** Sejam $M$ e $m$, respetivamente, o máximo e o mínimo absolutos da função $h$ no intervalo $[0,1]$

A amplitude $A$ da oscilação do tabuleiro da ponte, neste intervalo, é dada por $A = M - m$

Determine o valor de $A$, recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos.

Apresente o resultado em metros.

**4.2.** Em $[0,1]$, o conjunto solução da inequação $h(t) < 19{,}5$ é um intervalo da forma $]a, b[$

Determine o valor de $b - a$ arredondado às centésimas, recorrendo à calculadora gráfica, e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.

Na sua resposta:

- reproduza o gráfico da função $h$ visualizado na calculadora (sugere-se que, na janela de visualização, considere $y \in [19{,}21]$);
- apresente o valor de $a$ e o valor de $b$ arredondados às milésimas;
- apresente o valor de $b - a$ arredondado às centésimas;
- interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

**5.** Seja $f$ uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja **derivada**, $f'$, de domínio $\mathbb{R}$, é dada por

$$f'(x) = e^x\left(x^2 + x + 1\right)$$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

**5.1.** Sejam $p$ e $q$ dois números reais tais que

$$p = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \qquad \text{e} \qquad q = -\frac{1}{p}$$

Determine o valor de $q$ e interprete geometricamente esse valor.

**5.2.** Estude a função $f$ quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de $f$

**6.** Considere a função $f$, de domínio $]-\infty, -1[\, \cup \,]1, +\infty[$, definida por $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

Resolva os itens **6.1.** e **6.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

**6.1.** Estude a função $f$ quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

**6.2.** Seja $a$ um número real maior do que $1$

Mostre que a reta secante ao gráfico de $f$ nos pontos de abcissas $a$ e $-a$ passa na origem do referencial.

**FIM**

## COTAÇÕES

<table>
<tr><td rowspan="2">Grupo</td><td colspan="13">Item</td></tr>
<tr><td colspan="13">Cotação (em pontos)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">I</td><td colspan="12">1. a 8.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="12">8 × 5 pontos</td><td>40</td></tr>
<tr><td rowspan="2">II</td><td>1.</td><td>2.1.</td><td>2.2.</td><td>3.1.</td><td>3.2.</td><td>3.3.</td><td>4.1.</td><td>4.2.</td><td>5.1.</td><td>5.2.</td><td>6.1.</td><td>6.2.</td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>10</td><td>160</td></tr>
<tr><td colspan="13">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>

ESTA FOLHA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

**Prova 635**

1.ª Fase

VERSÃO 1

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

# Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

## Prova 635/1.ª Fase

Critérios de Classificação

11 Páginas

**2016**

# CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

**Itens de seleção**

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

**Itens de construção**

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

| Situação | Classificação |
|---|---|
| 1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação. | É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado. |
| 2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»]. | A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos. |
| 3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações. | A resposta é classificada com zero pontos. |
| 4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa. | A etapa é pontuada com zero pontos. |
| 5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações. | Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista.<br>Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam. |
| 6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item. | Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas.<br>Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte:<br>– nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista;<br>– nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação. |
| 7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa. | Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa.<br>Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista.<br>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2). |
| 8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa. | É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.<br>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2). |
| 9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa. | A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista.<br>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2). |
| 10. Resolução incompleta de uma etapa. | Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista. |

| Situação | Classificação |
|---|---|
| 11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto. | É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. |
| 12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal]. | É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final. |
| 13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato. | É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final. |
| 14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos. | A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista. |
| 15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado. | É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final. |
| 16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final. | A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista. |
| 17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado. | Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada.<br>Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. |
| 18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal. | É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto:<br>– se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos;<br>– nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada. |

**Nota 1** – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

**Nota 2** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

### GRUPO I

**1. a 8.** ............................................................ (8 × 5 pontos)....................................................... **40 pontos**

Chave:

| Itens | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Versão 1 | C | B | B | D | D | A | C | B |
| Versão 2 | D | C | D | B | C | D | A | A |

### GRUPO II

**1.** .................................................................................................................................. **15 pontos**

Escrever $-1+\sqrt{3}\,i$ na forma trigonométrica ...................................................... 1 ponto

Escrever um argumento de $z_1$, em função de $\theta$ ................................................ 3 pontos

Escrever um argumento de $\overline{z_1}$, em função de $\theta$ ................................................ 3 pontos

Escrever um argumento de $\overline{z_1} \times z_2$, em função de $\theta$ ........................................ 3 pontos

Escrever uma condição em $\theta$ para que $\overline{z_1} \times z_2$ seja um número real (**ver nota**) 3 pontos

Obter o valor de $\theta$ pertencente ao intervalo $]0,\pi[$ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ................................ 2 pontos

**Nota** – Se for apresentada apenas a condição $\theta + \frac{2\pi}{3} = 0$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto. Se for apresentada a condição $\theta + \frac{2\pi}{3} = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 2 pontos.
Em ambas as situações, a pontuação a atribuir na etapa seguinte é 0 pontos.

**2.1.** ............................................................................................................................... **15 pontos**

Apresentar os valores da variável ..................................................................... 2 pontos

Determinar o valor de $P(X=1)$ $\left(\frac{1}{6}\right)$ .......................................................... 3 pontos

Determinar o valor de $P(X=2)$ $\left(\frac{4}{9}\right)$ .......................................................... 3 pontos

Determinar o valor de $P(X=4)$ $\left(\frac{5}{18}\right)$ ........................................................ 3 pontos

Determinar o valor de $P(X=8)$ $\left(\frac{1}{9}\right)$ ........................................................ 3 pontos

Apresentar a tabela pedida ........................................................................ 1 ponto

**Nota** – Se uma ou mais de uma das probabilidades não forem apresentadas na forma de fração irredutível, é subtraído 1 ponto à soma das pontuações atribuídas.

**2.2.** .................................................................................................................................. **15 pontos**

Apresentar a expressão

$\big({}^{8}C_3 \times 5$ ou $8 \times {}^{7}C_4$ ou ${}^{8}C_4 \times 4$ ou ${}^{8}C_3 \times {}^{5}C_4$ ou $8 \times {}^{7}C_3$

ou ${}^{8}C_4 \times {}^{4}C_3$ ou outra expressão equivalente, que utilize a simbologia da combinatória$\big)$ (**ver nota**) ........................................................................ 14 pontos

Obter o valor pedido $(280)$ ................................................................. 1 ponto

**Nota** – Por cada fator incorreto ou não apresentado são descontados 7 pontos. Também são descontados 7 pontos caso seja considerada uma operação diferente da multiplicação. Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

**3.1.** .................................................................................................................................. **5 pontos**

Concluir que o raio da superfície esférica é $1$ ................................................ 2 pontos

Escrever a condição pedida

$\left((x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \text{ ou equivalente}\right)$ (**ver notas 1**, **2** e **3**) ......... 3 pontos

**Notas:**

**1.** Se for apresentada apenas a condição $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ (ou equivalente), a classificação a atribuir à resposta é 5 pontos.

**2.** A escrita do símbolo $\leq$, em vez de $=$, implica uma desvalorização de 1 ponto nesta etapa.

**3.** A escrita de um dos símbolos $<$, $>$ ou $\geq$, em vez de $=$, implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa.

**3.2.** .................................................................................................................................. **10 pontos**

Determinar a abcissa e a ordenada do ponto $V$ ............................................. 4 pontos

Escrever a equação $6+z-10=0$ (ou equivalente) .................................... 4 pontos

Obter o valor de $z$ ........................................................................................ 1 ponto

Apresentar as coordenadas do ponto $V\left((-2,2,4)\right)$ .................................... 1 ponto

**3.3.** .................................................................................................................................... **15 pontos**

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$ ........................................................ 1 ponto

Escrever a equação $-2x+2y+d=0$ (ou equivalente) ............................... 2 pontos

Determinar o valor de $d$ ........................................................................................ 1 ponto

Escrever uma equação do plano $\alpha$ ................................................................. 2 pontos

Escrever o sistema $\begin{cases} -2x+2y+6=0 \\ 3y+z-10=0 \end{cases}$ .......................................................... 3 pontos

Escrever uma equação vetorial da reta pedida ................................................. 6 pontos

Escrever $\begin{cases} y=x-3 \\ y=\dfrac{-z+10}{3} \end{cases}$ .......................................................... 2 pontos

Escrever $x-3=y=\dfrac{z-10}{-3}$ .................................................... 2 pontos

Obter uma equação vetorial $\left(\left(x,y,z\right)=\left(3,0,10\right)+k\left(1,1,-3\right),\ k\in\mathbb{R}\right.$ ou outra equação vetorial equivalente$\left.\right)$ ................................................................. 2 pontos

OU

Escrever $\begin{cases} x=y+3 \\ z=-3y+10 \end{cases}$ .......................................................... 2 pontos

Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta $\left(\left(y+3,\ y,\ -3y+10\right)\right)$ .......................................................... 2 pontos

Obter uma equação vetorial $\left(\left(x,y,z\right)=\left(3,0,10\right)+k\left(1,1,-3\right),\ k\in\mathbb{R}\right.$ ou outra equação vetorial equivalente$\left.\right)$ ................................................................. 2 pontos

OU

Obter as coordenadas de dois pontos da reta ............................ 2 pontos

Obter as coordenadas de um vetor diretor da reta ..................... 2 pontos

Obter uma equação vetorial $\left(\left(x,y,z\right)=\left(3,0,10\right)+k\left(1,1,-3\right),\ k\in\mathbb{R}\right.$ ou outra equação vetorial equivalente$\left.\right)$ ................................................................. 2 pontos

**4.1.** .................................................................................................................. **15 pontos**

Determinar $h'(t)$ (**ver nota**) ........................................................................ 3 pontos

Determinar os zeros de $h'$ em $[0,1]$ ........................................................ 5 pontos

Escrever $h'(t)=0$ ........................................................................ 1 ponto

Obter os zeros de $h'$ em $[0,1]$ ................................................ 4 pontos

Apresentar um quadro de sinal de $h'$ e de monotonia de $h$ (ou equivalente) ........................................................................ 2 pontos

Determinar $h(0)$, $h\left(\frac{1}{4}\right)$, $h\left(\frac{3}{4}\right)$ e $h(1)$ ............. (1 + 1 + 1 + 1) ............. 4 pontos

Obter o valor de $A$ $(1)$ ........................................................................ 1 ponto

**Nota** – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

**4.2.** .................................................................................................................. **15 pontos**

Reproduzir o gráfico da função $h$ no intervalo $[0,1]$ (**ver nota**) .................... 3 pontos

Apresentar o valor de $a$ ........................................................................ 3 pontos

Apresentar o valor de $b$ ........................................................................ 3 pontos

Obter o valor de $b-a$ $(0{,}27)$ ........................................................................ 1 ponto

Interpretar o valor obtido no contexto da situação descrita (No decorrer da medição, a distância do ponto $P$ ao ponto fixo do vale foi inferior a $19{,}5$ metros durante $0{,}27$ minutos) ........................................................................ 5 pontos

**Nota** – Se for apresentado um gráfico que não respeite a condição $t\in[0,1]$, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 2 pontos.

**5.1.** .................................................................................................................. **15 pontos**

Identificar $p$ com $f'(-1)$ ........................................................................ 4 pontos

Determinar o valor de $p$ ........................................................................ 5 pontos

Obter o valor de $q$ $(-e)$ ........................................................................ 1 ponto

Interpretar geometricamente o valor de $q$ (o valor de $q$ é o declive de qualquer reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $-1$) (**ver notas 1** e **2**) ........................................................................ 5 pontos

**Notas:**

1. Se a interpretação geométrica do valor de $q$ for incorreta, mas for evidente que foi corretamente interpretado, do ponto de vista geométrico, o valor de $p$, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 3 pontos.
2. Se for referido que $q$ é o declive da reta perpendicular à reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa $-1$, ou de qualquer outro caso particular de reta perpendicular à referida tangente, esta etapa é considerada como cumprida.

**5.2.** .................................................................................................................................... **15 pontos**

Determinar $f''(x)$ (**ver nota 1**) .......................................................................... 4 pontos

Aplicar a regra de derivação do produto ..................................... 1 ponto

Obter $f''(x)$ ................................................................................. 3 pontos

Determinar os zeros de $f''$ ...................................................................... 5 pontos

Escrever $f''(x) = 0$ ..................................................................... 1 ponto

Obter os zeros de $f''$ .................................................................. 4 pontos

Estudar a função $f$ quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão ........................................ 6 pontos

Apresentar um quadro de sinal de $f''$ e de sentido da concavidade do gráfico de $f$ (ou equivalente) ............................ 2 pontos

Referir que o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2[$ e em $]-1, +\infty[$ (**ver nota 2**) ........................... 1 ponto

Referir que o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para baixo em $]-2, -1[$ (**ver nota 3**) ........................................................ 1 ponto

Indicar as abissas dos pontos de inflexão do gráfico da função $f$ $(-2$ e $-1)$ ......................................................................... 2 pontos

**Notas:**

1. Se for evidente a intenção de determinar a segunda derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
2. Se for referido que o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2]$ e em $[-1, +\infty[$, em vez de em $]-\infty, -2[$ e em $]-1, +\infty[$, esta etapa é considerada como cumprida.
3. Se for referido que o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para baixo em $[-2, -1]$, em vez de em $]-2, -1[$, esta etapa é considerada como cumprida.

**6.1.** ........................................................................................................................ **15 pontos**

Justificar que apenas a reta de equação $x = -1$ e a reta de equação $x = 1$ podem ser assíntotas verticais do gráfico da função $f$ ...................................... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ ........................................................................................ 6 pontos

Concluir que $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x-1}{x+1} = +\infty$ .............................................. 3 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \quad (+\infty)$ ........................................................ 3 pontos

Concluir que a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical do gráfico da função $f$ ........................................................................................ 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ ........................................................................................ 6 pontos

Concluir que, quando $x$ tende para $1$, por valores superiores a $1$, $\dfrac{x-1}{x+1}$ tende para $0$, por valores positivos................................. 3 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \quad (-\infty)$ ........................................................ 3 pontos

Concluir que a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical do gráfico da função $f$ ........................................................................................ 1 ponto

**6.2.** ........................................................................................................................ **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Seja $A$ o ponto da reta de abcissa $a$, e seja $B$ o ponto da reta de abcissa $-a$

Escrever as coordenadas de $A$ e as coordenadas de $B$, em função de $a$ ...... 1 ponto

Obter o declive, $m$, da reta $AB$, em função de $a$ ........................................... 2 pontos

Escrever a condição $y = mx + b$, com $m$ em função de $a$ .......................... 1 ponto

Obter o valor de $b$ $(0)$ ........................................................................................ 5 pontos

Concluir o pretendido ........................................................................................ 1 ponto

**2.º Processo**

Seja $A$ o ponto da reta de abcissa $a$, seja $B$ o ponto da reta de abcissa $-a$,
e seja $M$ o ponto médio do segmento de reta $[AB]$

Escrever as coordenadas de $A$ e as coordenadas de $B$, em função de $a$ ...... 1 ponto

Mostrar que o ponto $M$ é a origem do referencial ........................................... 8 pontos

Obter o valor da abcissa $(0)$ ..................................................... 1 ponto

Escrever a ordenada, em função de $a$

$$\left(\frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)+\ln\left(\frac{-a-1}{-a+1}\right)}{2}\right)$$ ..................................................... 2 pontos

Obter o valor da ordenada $(0)$ .................................................. 5 pontos

Concluir o pretendido .......................................................................................... 1 ponto



## COTAÇÕES

| Grupo | Item | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Cotação (em pontos) | | | | | | | | | | | | |
| I | 1. a 8. | | | | | | | | | | | | |
| | 8 × 5 pontos | | | | | | | | | | | | 40 |
| II | 1. | 2.1. | 2.2. | 3.1. | 3.2. | 3.3. | 4.1. | 4.2. | 5.1. | 5.2. | 6.1. | 6.2. | |
| | 15 | 15 | 15 | 5 | 10 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 10 | 160 |
| TOTAL | | | | | | | | | | | | | 200 |