REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/2.ª Fase 14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2016

VERSÃO 1

Página em branco

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ $(n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ $(n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$

Página em branco

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}2$
- $P(B) = 0{,}3$
- $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}6$

Qual é o valor de $P\left(A|B\right)$?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{5}{6}$

2. O Carlos joga basquetebol na equipa da sua escola.

Admita que, em cada lance livre, a probabilidade de o Carlos encestar é $0{,}4$

Num treino, o Carlos vai executar uma série de cinco lances livres.

Qual é a probabilidade de o Carlos encestar exatamente quatro vezes?

(A) $0{,}01536$ **(B)** $0{,}05184$ **(C)** $0{,}0768$ **(D)** $0{,}2592$

3. Para certos valores de a e de b $(a > 1$ e $b > 1)$, tem-se $\log_a(ab^3) = 5$

Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_b a$?

(A) $\frac{5}{3}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{3}{5}$ **(D)** $\frac{1}{3}$

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln x$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{n}{e^n}$

Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** e **(D)** $+\infty$

5. Na Figura 1, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1

Sabe-se que:

- os diâmetros $[AC]$ e $[BD]$ são perpendiculares;
- o ponto P pertence ao arco AB
- $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência;
- o ponto R pertence a $[OD]$ e é tal que $[QR]$ é paralelo a $[AC]$

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOP

$\left(\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$

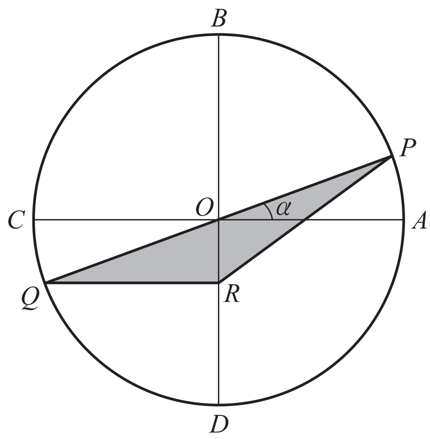

Figura 1

Qual das seguintes expressões dá a área do triângulo $[PQR]$, representado a sombreado, em função de α ?

(A) $\dfrac{\cos(2\alpha)}{4}$ **(B)** $\dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$ **(C)** $\dfrac{\cos(2\alpha)}{2}$ **(D)** $\dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

6. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = 3 + 4i$

Sabe-se que z é uma das raízes de índice 6 de um certo número complexo w

Considere, no plano complexo, o polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 6 desse número complexo w

Qual é o perímetro do polígono?

(A) 42 **(B)** 36 **(C)** 30 **(D)** 24

7. Considere, num referencial o.n. xOy, o quadrado definido pela condição

$$0 \leq x \leq 4 \quad \wedge \quad 1 \leq y \leq 5$$

Qual das condições seguintes define a circunferência inscrita neste quadrado?

(A) $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 16$

(B) $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$

(C) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$

(D) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$

8. De uma progressão geométrica (u_n), monótona crescente, sabe-se que $u_4 = 32$ e que $u_8 = 8192$

Qual é o quinto termo da sucessão (u_n) ?

(A) 64 **(B)** 128 **(C)** 256 **(D)** 512

Página em branco

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere nove fichas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9

1.1. Considere duas caixas, U e V

Colocam-se as fichas numeradas de 1 a 5 na caixa U e as fichas numeradas de 6 a 9 na caixa V

Realiza-se a seguinte experiência.

Retira-se, ao acaso, uma ficha da caixa U e retira-se, também ao acaso, uma ficha da caixa V

Sejam A e B os acontecimentos:

A : «*A soma dos números das fichas retiradas é igual a* 10»

B : «*O produto dos números das fichas retiradas é ímpar*»

Determine o valor de $P\left(B|A\right)$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Na sua resposta:

- explique o significado de $P\left(B|A\right)$ no contexto da situação descrita;
- indique os casos possíveis, apresentando cada um deles na forma (u,v), em que u designa o número da ficha retirada da caixa U e v designa o número da ficha retirada da caixa V
- indique os casos favoráveis;
- apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.

1.2. Na Figura 2, está representado um tabuleiro com 16 casas, dispostas em quatro filas horizontais $\left(A, B, C \text{ e } D\right)$ e em quatro filas verticais $\left(1, 2, 3 \text{ e } 4\right)$

Pretende-se dispor as nove fichas (numeradas de 1 a 9) no tabuleiro, de modo que cada ficha ocupe uma única casa e que cada casa não seja ocupada por mais do que uma ficha.

De quantas maneiras diferentes é possível dispor as nove fichas, de tal forma que as que têm número par ocupem uma única fila horizontal?

	1	2	3	4
A				
B				
C				
D				

Figura 2

2. Seja ρ um número real positivo, e seja θ um número real pertencente ao intervalo $]0, \pi[$

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{-1+i}{(\rho \operatorname{cis}\theta)^2}$ e $w = -\sqrt{2}\,i$

Sabe-se que $z = w$

Determine o valor de ρ e o valor de θ

3. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido pela equação $3x + 2y + 4z - 12 = 0$

3.1. Seja C o ponto de coordenadas $(2, 1, 4)$

Escreva uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α que passa no ponto C

3.2. Seja D o ponto de coordenadas $(4, 2, 2)$

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta OD com o plano α

3.3. Sejam A e B os pontos pertencentes ao plano α, tais que A pertence ao semieixo positivo Ox e B pertence ao semieixo positivo Oy

Seja P um ponto com cota diferente de zero e que pertence ao eixo Oz

Justifique, recorrendo ao produto escalar de vetores, que o ângulo APB é agudo.

4. Seja f a função, de domínio $\left]-\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 + \operatorname{sen} x}{\cos x} & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ x - \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Estude a função f quanto à existência de assíntota oblíqua do seu gráfico.

4.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$

4.3. Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$

Além do ponto de tangência, a reta r intersecta o gráfico de f em mais dois pontos, A e B, cujas abcissas pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ (considere que o ponto A é o de menor abcissa).

Determine analiticamente a equação reduzida da reta r e, utilizando a calculadora gráfica, obtenha as abcissas dos pontos A e B

Apresente essas abcissas arredondadas às centésimas.

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema.

5. O José e o António são estudantes de Economia. O José pediu emprestados 600 euros ao António para comprar um computador, tendo-se comprometido a pagar o empréstimo em prestações mensais sujeitas a um certo juro.

Para encontrarem as condições de pagamento do empréstimo, os dois colegas adaptaram uma fórmula que tinham estudado e estabeleceram um contrato.

Nesse contrato, a prestação mensal p, em euros, que o José tem de pagar ao António é dada por

$$p = \frac{600x}{1 - e^{-nx}} \quad (x > 0)$$

em que n é o número de meses em que o empréstimo será pago e x é a taxa de juro mensal.

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** recorrendo a métodos analíticos.

Na resolução do item **5.1.**, pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

5.1. O José e o António acordaram que a taxa de juro mensal seria $0{,}3\%$ $(x = 0{,}003)$

Em quantos meses será pago o empréstimo, sabendo-se que o José irá pagar uma prestação mensal de 24 euros?

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

5.2. Determine $\lim\limits_{x \to 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}}$, em função de n, e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

6. Seja g uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}$, tal que:

- para todo o número real x, $(g \circ g)(x) = x$
- para um certo número real a, tem-se $g(a) > a + 1$

Mostre que a equação $g(x) = x + 1$ é possível no intervalo $]a, g(a)[$

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><th rowspan="2">Grupo</th><th colspan="13">Item</th></tr>
<tr><td colspan="13">Cotação (em pontos)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">I</td><td colspan="12">1. a 8.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="12">8 × 5 pontos</td><td>40</td></tr>
<tr><td rowspan="2">II</td><td>1.1.</td><td>1.2.</td><td>2.</td><td>3.1.</td><td>3.2.</td><td>3.3.</td><td>4.1.</td><td>4.2.</td><td>4.3.</td><td>5.1.</td><td>5.2.</td><td>6.</td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>5</td><td>15</td><td>10</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>10</td><td>160</td></tr>
<tr><td colspan="13">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>

ESTA FOLHA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

2.ª Fase

VERSÃO 1

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/2.ª Fase

Critérios de Classificação

11 Páginas

2016

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. ....(8 × 5 pontos)... **40 pontos**

Chave:

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	A	C	B	A	D	C	C	B
Versão 2	B	B	A	C	C	B	D	C

GRUPO II

1.1. .... **15 pontos**

Explicar o significado de $P(B|A)$ no contexto da situação descrita $\Big(P(B|A)$ é a probabilidade de o produto dos números das fichas retiradas ser ímpar, sabendo que a sua soma é igual a $10\Big)$ .... 5 pontos

Indicar os casos possíveis, na forma pedida $\big((1, 9), (2, 8), (3, 7)$ e $(4, 6)\big)$ .... 4 pontos

Indicar os casos favoráveis $\big((1, 9)$ e $(3, 7)\big)$ .... 4 pontos

Apresentar o valor pedido $\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 2 pontos

1.2. .... **15 pontos**

Apresentar a expressão $4 \times 4! \times {}^{12}A_5$ (ou outra expressão equivalente, que utilize a simbologia da combinatória) (**ver nota 1**) .... 14 pontos

Obter o valor pedido $(9123\,840)$ (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Notas:

1. A expressão $4 \times 4! \times {}^{12}A_5$ é o produto das expressões 4, $4!$ e ${}^{12}A_5$. Por cada expressão conceptualmente incorreta ou não apresentada, são descontados 7 pontos. Também são descontados 7 pontos caso seja considerada, uma ou mais vezes, uma operação diferente da multiplicação. Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, esta etapa é pontuada com 0 pontos.
2. A pontuação relativa a esta etapa só é atribuída se à etapa anterior não tiverem sido atribuídos 0 pontos.

2. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $-1+i$ na forma trigonométrica .... 1 ponto

Escrever $(\rho \operatorname{cis}\theta)^2 = \rho^2 \operatorname{cis}(2\theta)$ .... 2 pontos

Indicar o módulo de z, em função de ρ .... 1 ponto

Escrever um argumento de z, em função de θ .... 2 pontos

Escrever $-\sqrt{2}\,i$ na forma trigonométrica .... 1 ponto

Concluir que $\frac{\sqrt{2}}{\rho^2} = \sqrt{2} \wedge \frac{3\pi}{4} - 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter o valor de ρ (1) .... 1 ponto

Resolver a condição $\frac{3\pi}{4} - 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (ou uma condição equivalente), em ordem a θ .... 2 pontos

Obter o valor de θ pertencente ao intervalo $]0, \pi[$ $\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ .... 3 pontos

2.º Processo

Escrever $(\rho \operatorname{cis}\theta)^2$ na forma algébrica .... 3 pontos

Escrever z na forma algébrica .... 4 pontos

Escrever a condição

$\frac{\operatorname{sen}(2\theta) - \cos(2\theta)}{\rho^2} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\cos(2\theta) + \operatorname{sen}(2\theta)}{\rho^2} = -\sqrt{2}$ .... 1 ponto

Escrever a condição

$2\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \wedge \quad \frac{\cos(2\theta) + \operatorname{sen}(2\theta)}{\rho^2} = -\sqrt{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $\theta \in \left]0, \pi\right[$ .. 2 pontos

Escrever a condição

$\left(\theta = \frac{\pi}{8} \vee \theta = \frac{5\pi}{8}\right) \wedge \frac{\cos(2\theta) + \operatorname{sen}(2\theta)}{\rho^2} = -\sqrt{2}$ .... 2 pontos

Obter o valor de θ e o valor de ρ $\left(\theta = \frac{5\pi}{8} \text{ e } \rho = 1\right)$ .... 3 pontos

3.1. .... **5 pontos**

Escrever as coordenadas de um vetor diretor da reta pedida .... 2 pontos

Escrever uma equação vetorial da reta pedida

$\left((x,y,z) = (2,1,4) + k(3,2,4),\ k \in \mathbb{R}\right.$ ou outra equação vetorial equivalente$\left.\right)$ 3 pontos

Nota – Se for apresentada apenas a equação $(x, y, z) = (2, 1, 4) + k(3, 2, 4),\ k \in \mathbb{R}$ (ou outra equação vetorial equivalente), a pontuação a atribuir à resposta é 5 pontos.

3.2. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo (recorrendo a uma condição cartesiana da reta OD)

Escrever $\overrightarrow{OD}=(4,2,2)$ .... 1 ponto

Escrever uma condição cartesiana da reta OD $\left(\text{por exemplo, } \frac{x}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}\right)$ .... 5 pontos

Escrever o sistema $\begin{cases} 3x+2y+4z-12=0 \\ \frac{x}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2} \end{cases}$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Resolver o sistema .... 5 pontos

Indicar as coordenadas do ponto de intersecção $\big((2,1,1)\big)$ .... 1 ponto

2.º Processo (recorrendo a uma equação vetorial da reta OD)

Escrever $\overrightarrow{OD}=(4,2,2)$ .... 1 ponto

Escrever uma equação vetorial da reta OD

$\big((x,y,z)=k(4,2,2),\ k\in\mathbb{R}$ ou outra equação vetorial equivalente$\big)$ .... 3 pontos

Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta OD, em função de k .... 2 pontos

Obter uma equação na variável k, substituindo x, y e z na equação do plano α pelas coordenadas de um ponto genérico da reta OD .... 4 pontos

Obter o valor de k .... 2 pontos

Obter as coordenadas do ponto de intersecção $\big((2,1,1)\big)$ .... 3 pontos

3.3. .... **10 pontos**

Seja z a cota do ponto P

Escrever $P(0,0,z)$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto A .... 1 ponto

Determinar as coordenadas do ponto B .... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{PA}$, em função de z (**ver nota**) .... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{PB}$, em função de z (**ver nota**) .... 1 ponto

Calcular $\overrightarrow{PA}\,.\,\overrightarrow{PB}$ (z^2) (**ver nota**) .... 1 ponto

Concluir o pretendido (referir que a conclusão resulta do facto de o produto escalar ser positivo) (**ver nota**) .... 3 pontos

Nota – Se for apresentada uma concretização para a cota do ponto P, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

4.1. .... **15 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ .... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\ln x}{x}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$ .... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ .... 1 ponto

Obter o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ (1) .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ .... 4 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x-x)$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-\ln x)$ .... 1 ponto

Obter o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ $(-\infty)$ .... 2 pontos

Concluir que o gráfico da função f não tem assíntota oblíqua .... 3 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$, a classificação a atribuir à resposta é desvalorizada em 2 pontos. Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, a resposta é classificada com 0 pontos.

4.2. .... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ em $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Determinar o zero de f' em $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ .... 5 pontos

Escrever $f'(x)=0$ .... 1 ponto

Obter o zero de f' em $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ .... 4 pontos

Estudar a função f quanto à monotonia, no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ .... 6 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f (ou equivalente) (**ver notas 2** e **3**) .... 5 pontos

Concluir que a função tem um mínimo para $x=-\frac{\pi}{6}$ .... 1 ponto

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
2. Se, na primeira linha do quadro, a resposta apresentar $-\infty$, em vez de $-\frac{\pi}{2}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.
3. Se, na primeira linha do quadro, a resposta apresentar $+\infty$, em vez de 0, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 2 pontos.
4. Se for utilizada a expressão $x - \ln x$, a pontuação máxima a atribuir à resposta é 2 pontos $($1 ponto pela intenção de calcular $f'(x)$ e 1 ponto pela intenção de resolver a equação $f'(x) = 0)$.

4.3. .... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ em $]0, +\infty[$ .... 2 pontos

Obter $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

Obter $f\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

Escrever a equação reduzida da reta r .... 2 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver o problema (**ver nota**) .... 5 pontos

Apresentar a abcissa do ponto A $(-1{,}19)$ .... 2 pontos

Apresentar a abcissa do ponto B $(-0{,}17)$ .... 2 pontos

Nota – Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

5.1. .... **15 pontos**

Equacionar o problema .... 3 pontos

Resolver a equação $24 = \dfrac{600 \times 0{,}003}{1 - e^{-0{,}003n}}$ .... 10 pontos

Escrever $24 = \dfrac{600 \times 0{,}003}{1 - e^{-0{,}003n}} \Leftrightarrow 24\left(1 - e^{-0{,}003n}\right) = 1{,}8$ .... 2 pontos

Escrever $24\left(1 - e^{-0{,}003n}\right) = 1{,}8 \Leftrightarrow 1 - e^{-0{,}003n} = \dfrac{1{,}8}{24}$ .... 2 pontos

Escrever $1 - e^{-0{,}003n} = \dfrac{1{,}8}{24} \Leftrightarrow e^{-0{,}003n} = \dfrac{37}{40}$ .... 2 pontos

Escrever $e^{-0{,}003n} = \dfrac{37}{40} \Leftrightarrow -0{,}003n = \ln\left(\dfrac{37}{40}\right)$ .... 3 pontos

Escrever $-0{,}003n = \ln\left(\dfrac{37}{40}\right) \Leftrightarrow n = \dfrac{\ln\left(\frac{37}{40}\right)}{-0{,}003}$ .... 1 ponto

Responder ao problema $(26$ meses$)$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Nota – Se a resposta for $n \approx 26$, esta etapa é considerada como cumprida.

5.2. .... **15 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{600x}{1 - e^{-nx}}$ .... 10 pontos

Este limite pode ser determinado por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{600x}{1 - e^{-nx}} \underset{y = -nx}{=} \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{600\left(-\dfrac{y}{n}\right)}{1 - e^{y}}$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{600\left(-\dfrac{y}{n}\right)}{1 - e^{y}} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{-600y}{n(1 - e^{y})}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{-600y}{n(1 - e^{y})} = \dfrac{600}{n} \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{-y}{1 - e^{y}}$ .... 1 ponto

Escrever $\dfrac{600}{n} \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{-y}{1 - e^{y}} = \dfrac{600}{n} \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y}{e^{y} - 1}$ .... 2 pontos

Escrever $\dfrac{600}{n} \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y}{e^{y} - 1} = \dfrac{600}{n} \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{1}{\dfrac{e^{y} - 1}{y}}$ .... 2 pontos

Reconhecer o limite notável $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - 1}{x} = 1$ .... 1 ponto

Obter o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{600x}{1 - e^{-nx}}$ $\left(\dfrac{600}{n}\right)$ .... 1 ponto

2.º Processo

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{600x}{1 - e^{-nx}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{600x}{1 - \dfrac{1}{e^{nx}}}$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{600x}{1 - \dfrac{1}{e^{nx}}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{600x}{\dfrac{e^{nx} - 1}{e^{nx}}}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{600x}{\dfrac{e^{nx} - 1}{e^{nx}}} \underset{y = nx}{=} \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{600\left(\dfrac{y}{n}\right)}{\dfrac{e^{y} - 1}{e^{y}}}$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{600\left(\dfrac{y}{n}\right)}{\dfrac{e^{y} - 1}{e^{y}}} = \dfrac{600}{n} \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{e^{y}}{\dfrac{e^{y} - 1}{y}}$ .... 2 pontos

Reconhecer o limite notável $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - 1}{x} = 1$ .... 1 ponto

Obter o valor de $\lim_{x \to 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}}$ $\left(\frac{600}{n}\right)$ .... 2 pontos

Interpretar o resultado no contexto da situação descrita (Quando a taxa de juro tende para zero, a prestação mensal tende para o quociente entre o valor do empréstimo e o número de prestações mensais) .... 5 pontos

6. .... **10 pontos**

Referir que, em $[a, g(a)]$, a função h, definida por $h(x) = g(x) - x - 1$, é contínua (**ver notas 1** e **2**) .... 1 ponto

Determinar $h(a)$ .... 1 ponto

Determinar $h(g(a))$ .... 2 pontos

Referir que $h(a) > 0$ .... 1 ponto

Justificar que $h(g(a)) < 0$ (**ver nota 3**) .... 3 pontos

Evocar o teorema de Bolzano para concluir que a função h tem pelo menos um zero em $]a, g(a)[$ .... 1 ponto

Concluir o pretendido .... 1 ponto

Notas:

1. Se apenas for referido que a função h é contínua, esta etapa é considerada como cumprida.
2. Se for referido que a função h é contínua em $]a, g(a)[$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
3. Se apenas for referido que $h(g(a)) < 0$, sem qualquer justificação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

COTAÇÕES

Grupo	Item / Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.** — 8 × 5 pontos												40
II	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	
	15	15	15	5	15	10	15	15	15	15	15	10	**160**
TOTAL													**200**