

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática B

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 735/1.ª Fase

14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2016

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

Página em branco

Na resposta aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos e mínimos);
 - as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
 - as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).
-

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

• **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

• **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i , então:

• **Valor médio de X :**

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

• **Desvio padrão de X :**

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

GRUPO I

Uma empresa da indústria do calçado organizou a sua produção de alta qualidade em três departamentos: conceção, corte e acabamento.

1. Os departamentos de conceção e de corte laboram diariamente durante 8 horas, e o de acabamento durante 9 horas e 20 minutos. A empresa produz dois modelos de calçado de alta qualidade, X e Y, e tem assegurada a venda de toda a produção que realizar.

Cada par de calçado do modelo X necessita de 20 minutos no departamento de conceção, de meia hora no de corte e de 40 minutos no de acabamento.

Cada par de calçado do modelo Y necessita de 40 minutos no departamento de conceção, de meia hora no de corte e de 20 minutos no de acabamento.

O lucro que a empresa obtém com a venda de um par de calçado do modelo X é 100 euros, e o lucro obtido com a venda de um par de calçado do modelo Y é 150 euros.

Designe por x o número de pares de calçado do modelo X e por y o número de pares de calçado do modelo Y que a empresa produz diariamente.

Determine o número de pares de calçado do modelo X e o número de pares de calçado do modelo Y que a empresa deve produzir diariamente, de modo que o lucro seja máximo.

Na sua resposta, apresente:

- a função objetivo;
- as restrições do problema;
- uma representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições;
- o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

2. O número total de operários que trabalham nos departamentos de corte e de acabamento é 20

Escolhe-se, ao acaso, um dos 20 operários.

2.1. Desses 20 operários, uns trabalham apenas no departamento de corte e outros trabalham apenas no departamento de acabamento, mas também há operários que trabalham nos dois departamentos.

O número de operários que trabalham no departamento de corte é 10, e o número de operários que trabalham no departamento de acabamento é 13

Determine a probabilidade de o operário escolhido trabalhar nos dois departamentos.

Apresente o resultado em percentagem.

2.2. Seja Z a variável aleatória «número de dias em que o operário faltou, no último mês».

A tabela de distribuição de probabilidades de Z é

z_i	0	1	2	3
$P(Z = z_i)$	0,6	a	0,15	b

em que a e b são números reais.

Sabe-se que a probabilidade de o operário ter faltado no máximo 2 dias, no último mês, é 0,95

Determine o valor médio da variável aleatória Z

Na sua resposta, comece por obter os valores de a e de b

GRUPO II

As bactérias reproduzem-se predominantemente por um processo denominado divisão binária. Este processo ocorre quando uma bactéria duplica o seu material genético e se divide em duas bactérias idênticas à original.

1. Admita que, num dado instante inicial, uma bactéria se divide em duas e que, a partir desse instante, de 20 em 20 minutos, cada bactéria existente se divide em duas outras bactérias.

Assim, no instante inicial, existem duas bactérias e, por exemplo, passados 40 minutos, o número de bactérias existentes é oito.

Justifique que o número de bactérias existentes passadas 5 horas desde o instante inicial é superior a 65 000

2. Admita, agora, que, num dado instante, uma colónia tem 1000 bactérias, que se reproduzem, em simultâneo, por divisão binária.

Seja b_n o número de bactérias existentes na geração n desse processo, com $b_1 = 1000$, $b_2 = 2000$, $b_3 = 4000$, e assim sucessivamente.

Escreva o termo geral da sucessão (b_n)

Na sua resposta, justifique que (b_n) é uma progressão geométrica e identifique a razão dessa progressão.

Página em branco

GRUPO III

Numa cidade, foi detetada uma epidemia de gripe.

1. Admita que o número de pessoas com sintomas de gripe atendidas numa certa unidade de saúde dessa cidade, no dia de ordem x , contada a partir das zero horas do dia 11 de janeiro de 2016, é dado por $f(x)$, com $x \in \{1, 2, \dots, 40\}$

Por exemplo, $f(7)$ representa o número de pessoas com sintomas de gripe atendidas no dia 17 de janeiro de 2016, na unidade de saúde.

Sabe-se que, nessa unidade de saúde, no período de tempo considerado:

- em todos os dias, foram atendidas pessoas com sintomas de gripe;
- os dias em que foram atendidas mais de 180 pessoas com sintomas de gripe foram dias consecutivos.

Sabe-se, ainda, que o dia 30 de janeiro corresponde a um dos extremantes da função f

Nas Figuras 1, 2 e 3, estão representados três gráficos.

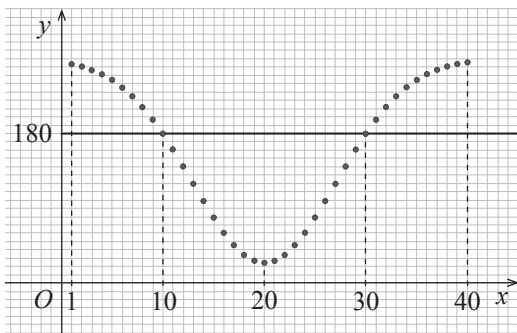


Figura 1

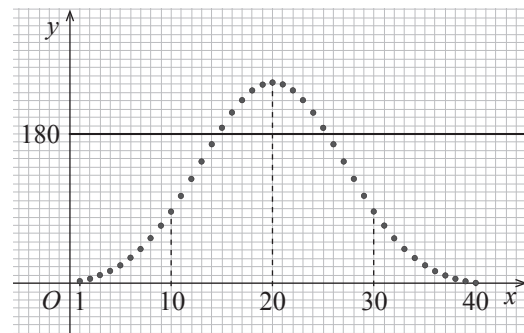


Figura 2

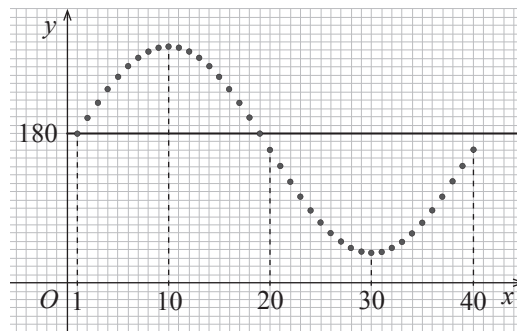


Figura 3

Apresente, num pequeno texto, para cada uma das Figuras, 1, 2 e 3, uma razão pela qual o gráfico representado **não** pode ser o gráfico da função f

2. Na referida cidade, existem três agrupamentos de escolas: A, B e C.

2.1. Admita que o número total de alunos do agrupamento A que foram infetados pelo vírus da gripe, N_A , desde as oito horas do dia 10 de janeiro de 2016 até t dias após esse instante, é dado, aproximadamente, por

$$N_A(t) = \frac{325}{1 + 12 \times 3^{-0,1t}}, \text{ para } 0 \leq t \leq 40$$

2.1.1. Quanto tempo teve de decorrer, desde as oito horas do dia 10 de janeiro de 2016, para o número total de alunos do agrupamento A infetados pelo vírus da gripe ultrapassar uma centena?

Justifique a sua resposta.

Apresente o resultado em dias e horas, com o número de horas arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

2.1.2. Admita, também, que o número total de alunos do agrupamento B que foram infetados pelo vírus da gripe, N_B , desde as oito horas do dia 10 de janeiro de 2016 até t dias após esse instante, é dado, aproximadamente, por

$$N_B(t) = k \times N_A(t), \text{ para } 0 \leq t \leq 40,$$

em que k é um número real.

Até às oito horas do dia 20 de janeiro de 2016, tinham sido infetados pelo vírus da gripe, no total, 39 alunos do agrupamento B.

Determine o valor de k

2.2. Admita, agora, que, desde as oito horas do dia 10 de janeiro de 2016 até t dias após esse instante, o número total de alunos do agrupamento C que foram infetados pelo vírus da gripe é dado, aproximadamente, por $N_C(t)$, para $0 \leq t \leq 40$

Na Figura 4, encontra-se representado o gráfico da função V , que dá a taxa de variação instantânea da função N_C , para cada valor de t

Considere a afirmação:

«Durante os primeiros 40 dias após as oito horas do dia 10 de janeiro de 2016, o valor máximo do número total de alunos do agrupamento C que foram infetados pelo vírus da gripe, desde aquele instante, foi atingido às oito horas do dia 19 de fevereiro de 2016.»

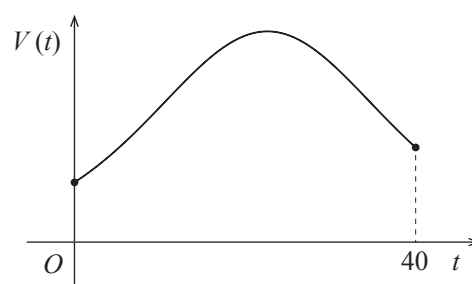


Figura 4

Justifique que esta afirmação é verdadeira, com base na relação existente entre o sinal da função V e a monotonia da função N_C

GRUPO IV

Na calçada portuguesa, os motivos geométricos são muito utilizados.

A Figura 5 é uma fotografia de um pavimento em calçada portuguesa.



Figura 5

A partir da fotografia, desenhou-se o esquema representado na Figura 6.

Nesse esquema, que não está desenhado à escala, estão representados:

- uma circunferência de centro no ponto O
- o triângulo equilátero $[ABC]$, inscrito nessa circunferência;
- as retas r e s , tangentes à circunferência nos pontos P e Q , respectivamente;
- o ponto R , ponto de intersecção das retas r e s

Admita que o ponto R pertence à reta OC e que o raio da circunferência mede $\sqrt{27}$ cm

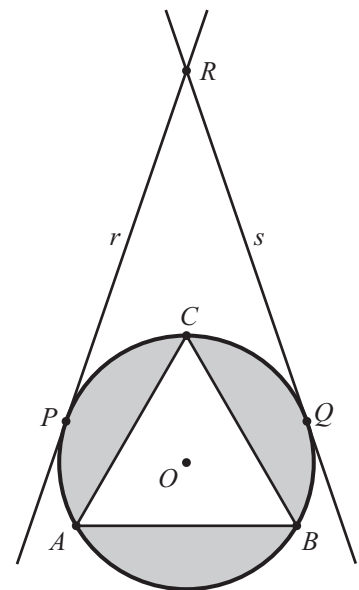


Figura 6

1. Mostre que o comprimento do lado do triângulo $[ABC]$ é exatamente 9 cm
2. Calcule a área total da região representada a sombreado na Figura 6.

Apresente o resultado em centímetros quadrados, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

3. Determine a amplitude do ângulo PRQ , sabendo-se que a distância do ponto C ao ponto R é 12 cm

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Na sua resposta, tenha em consideração que o ângulo OQR é um ângulo reto.

4. Na Figura 7, estão representados o triângulo equilátero $[ABC]$, de centro no ponto O , e as respectivas circunferências inscrita e circunscrita.

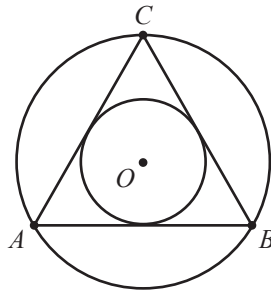


Figura 7

4.1. Indique o transformado do ponto A por meio da rotação de centro no ponto O e amplitude -240°

4.2. A razão entre as áreas dos círculos delimitados pelas circunferências representadas na Figura 7 é igual a 4

Determine o comprimento da circunferência inscrita no triângulo $[ABC]$

Apresente o resultado em centímetros, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Note que o raio da circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$ é $\sqrt{27}$ cm

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item					Cotação (em pontos)
	Cotação (em pontos)					
I	1.	2.1.	2.2.			
	30	10	20			60
II	1.	2.				
	10	15				25
III	1.	2.1.1.	2.1.2.	2.2.		
	20	15	10	10		55
IV	1.	2.	3.	4.1.	4.2.	
	15	15	15	5	10	60
TOTAL						200

ESTA FOLHA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 735

1.^a Fase

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática B

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 735/1.ª Fase

Critérios de Classificação

12 Páginas

2016

VERSÃO DE TRABALHO

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens com cotação igual ou superior a 20 pontos e que envolvam a produção de um texto tem em conta a clareza, a organização dos conteúdos e a utilização do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.

Situação	Classificação
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.

Situação	Classificação
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos, no máximo, dois pontos à soma das pontuações atribuídas.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1.	30 pontos
Indicar a função objetivo ($L(x, y) = 100x + 150y$)	2 pontos
Indicar as restrições (ver nota 1)	11 pontos
$20x + 40y \leq 480$ (ou equivalente) (ver notas 2 e 3)	3 pontos
$30x + 30y \leq 480$ (ou equivalente) (ver notas 2 e 3)	3 pontos
$40x + 20y \leq 560$ (ou equivalente) (ver notas 2 e 3)	3 pontos
$x \geq 0$	1 ponto
$y \geq 0$	1 ponto
Representar graficamente a região admissível	6 pontos
Representar graficamente a reta de equação $20x + 40y = 480$..	1 ponto
Representar graficamente a reta de equação $30x + 30y = 480$..	1 ponto
Representar graficamente a reta de equação $40x + 20y = 560$..	1 ponto
Assinalar o polígono	3 pontos
Calcular o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema	11 pontos
Obter as coordenadas dos vértices do polígono que não pertencem aos eixos coordenados ((12, 4) e (8, 8)) (2+2)	4 pontos
Obter as coordenadas dos vértices do polígono que pertencem aos eixos coordenados, com exceção da origem ((14, 0) e (0, 12)) (1+1)	2 pontos
Calcular o valor da função objetivo em cada um dos vértices do polígono, com exceção da origem (ou implementar o método da paralela à reta de nível zero) (ver nota 4) (1x4)	4 pontos
Indicar os valores pedidos ($x = 8$ e $y = 8$)	1 ponto

Notas:

1. Se, em alguma das restrições, for utilizado incorretamente o símbolo «<», em vez do símbolo «≤», ou o símbolo «>», em vez do símbolo «≥», a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto, no total.
2. Se, na restrição, for utilizado incorretamente o símbolo «=», em vez do símbolo «≤», a pontuação a atribuir a este passo é desvalorizada em 1 ponto.
3. Se, na restrição, for utilizado incorretamente o símbolo «≥», em vez do símbolo «≤», a pontuação a atribuir a este passo é desvalorizada em 2 pontos.
4. No caso de ser aplicado o método da paralela à reta de nível zero, se apenas for representada corretamente esta reta, a pontuação a atribuir a este passo é 2 pontos.

2.1. 10 pontos

- Calcular o número de operários que trabalham em ambos os departamentos (3).. 5 pontos
- Identificar o número de casos possíveis (20) 2 pontos
- Apresentar uma expressão para a probabilidade $\left(\frac{3}{20}\right)$ 1 ponto
- Apresentar o valor pedido (15%)..... 2 pontos

2.2. 20 pontos

- Identificar a probabilidade de o operário ter faltado no máximo 2 dias com $P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2)$ 3 pontos
- Escrever uma expressão que permita obter o valor de a 4 pontos
- Obter $a = 0,2$ 2 pontos
- Escrever uma expressão que permita obter o valor de b 4 pontos
- Obter $b = 0,05$ 2 pontos
- Calcular o valor médio de Z 5 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

- Escrever uma expressão para o valor médio 4 pontos
- Obter o valor médio (0,65) 1 ponto

2.º Processo

- Apresentar as listas introduzidas na calculadora 1 ponto
- Obter o valor médio, recorrendo às pontencialidades estatísticas da calculadora (0,65) 4 pontos

GRUPO II

1. 10 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Obter o número de períodos de 20 minutos correspondentes a 5 horas (15) ... 3 pontos

Apresentar uma expressão numérica referente ao número de bactérias existentes (2^{16}) 5 pontos

Concluir o pretendido 2 pontos

2.º Processo

Definir por recorrência a sucessão (u_n) do número de bactérias existentes na geração n ($u_1 = 2 \wedge u_{n+1} = 2 \times u_n$) 5 pontos

Apresentar uma tabela da sucessão com a linha relevante para a resolução do problema 3 pontos

Concluir o pretendido 2 pontos

2. 15 pontos

Justificar que (b_n) é uma progressão geométrica 5 pontos

Identificar a razão dessa progressão (2) 5 pontos

Apresentar o termo geral ($b_n = 1000 \times 2^{n-1}$ ou equivalente) 5 pontos

GRUPO III

1. 20 pontos

Tópicos de resposta:

- de acordo com o gráfico representado na Figura 1, os dias em que foram atendidas mais de 180 pessoas com sintomas de gripe não foram sempre consecutivos;
- no gráfico representado na Figura 2, a imagem de 40 é 0
- o dia 30 de janeiro corresponde a $x = 20$, e 20 não é um extremante da função cujo gráfico está representado na Figura 3.

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
4	Apresenta os três tópicos, de forma clara e organizada e com vocabulário específico adequado.	20
3	Apresenta os três tópicos, com pouca clareza ou com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização do vocabulário específico. OU Apresenta apenas dois dos três tópicos, de forma clara e organizada e com vocabulário específico adequado.	14
2	Apresenta apenas dois dos três tópicos, com pouca clareza ou com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização do vocabulário específico. OU Apresenta apenas um dos três tópicos, de forma clara e com vocabulário específico adequado.	8
1	Apresenta apenas um dos três tópicos, com pouca clareza ou com falhas na utilização do vocabulário específico.	2

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Traduzir o problema pela condição $N_A(t) > 100$ (ver nota 1) 2 pontos

Resolver a condição $N_A(t) > 100$ 10 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

Processo A

Representar graficamente a função N_A 4 pontos

Respeitar o domínio (ver nota 2) 2 pontos

Respeitar a forma do gráfico 2 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = 100$ 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção da reta de equação $y = 100$ com o gráfico de N_A 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto de intersecção (15,23719...) 3 pontos

Processo B

Escrever $325 > 100 \times (1 + 12 \times 3^{-0,1t})$ 1 ponto

Escrever $\frac{225}{1200} > 3^{-0,1t}$ 2 pontos

Escrever $-0,1t < \log_3\left(\frac{225}{1200}\right)$ 3 pontos

Escrever $t > \frac{\log_3\left(\frac{225}{1200}\right)}{-0,1}$ 2 pontos

Obter $t > 15,23719...$ 2 pontos

Converter 0,23719... dias em horas (6) 2 pontos

Apresentar o valor pedido (15 dias e 6 horas) 1 ponto

Notas:

1. Se, em vez de ser traduzido o problema, for apresentada alguma das condições $N_A(t) \geq 100$, $N_A(t) \leq 100$ ou $N_A(t) < 100$, a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.

2. Se for apresentada apenas parte do gráfico da função N_A :

- num intervalo $[0, b]$, com $b < 40$, que permita obter a abcissa do ponto de intersecção, a pontuação a atribuir a este passo não é desvalorizada;
- num intervalo $[a, b] \subset [0, 40]$, com $a \neq 0$, que permita obter a abcissa do ponto de intersecção, e for referido que a função N_A é crescente, a pontuação a atribuir a este passo não é desvalorizada.

2.º Processo

Escrever a equação $N_A(t) = 100$ 1 ponto

Escrever $325 = 100 \times (1 + 12 \times 3^{-0,1t})$ 1 ponto

Escrever $\frac{225}{1200} = 3^{-0,1t}$ 2 pontos

Escrever $-0,1 t = \log_3\left(\frac{225}{1200}\right)$ 3 pontos

Escrever $t = \frac{\log_3\left(\frac{225}{1200}\right)}{-0,1}$ 1 ponto

Obter o valor de t (15,23719...) 2 pontos

Referir que a função N_A é crescente 2 pontos

Converter 0,23719... dias em horas (6) 2 pontos

Apresentar o valor pedido (15 dias e 6 horas) 1 ponto

2.1.2. **10 pontos**

Identificar as oito horas do dia 20 de janeiro de 2016 com $t = 10$ 2 pontos

Equacionar o problema ($39 = k \times N_A(10)$) 3 pontos

Obter $N_A(10)$ (65) 3 pontos

Escrever $39 = k \times 65$ 1 ponto

Obter o valor pedido (0,6 ou equivalente) 1 ponto

2.2. **10 pontos**

Referir que a função V é positiva (ou apresentar a tabela de sinal da função V) 3 pontos

Referir que a função N_C é crescente (ou apresentar a tabela de monotonia da função N_C) 2 pontos

Referir que 40 é o maximizante da função N_C (ou referir que $N_C(40)$ é o valor máximo da função N_C) 3 pontos

Identificar $t = 40$ com as oito horas do dia 19 de fevereiro de 2016 2 pontos

GRUPO IV

1. 15 pontos

Utilizar um triângulo retângulo cujos catetos sejam o apótema e a metade do lado do triângulo $[ABC]$ e cuja hipotenusa seja um raio da circunferência de centro no ponto O 2 pontos

Identificar a amplitude de um dos ângulos agudos desse triângulo (30° ou 60°) 3 pontos

Escrever uma igualdade que permita calcular o valor de x , sendo x metade do comprimento do lado do triângulo $[ABC]$

$(\cos 30^\circ = \frac{x}{\sqrt{27}}$ ou $\sin 60^\circ = \frac{x}{\sqrt{27}})$ 4 pontos

Resolver a igualdade em ordem a x 2 pontos

Obter o valor de x (4,5) 2 pontos

Concluir que o comprimento do lado do triângulo $[ABC]$ é 9 cm 2 pontos

2. 15 pontos

Calcular a altura, h , do triângulo $[ABC]$ 6 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $9^2 = 4,5^2 + h^2$ (ou equivalente) 3 pontos

Obter $h^2 = 60,75$ 2 pontos

Obter o valor de h 1 ponto

2.º Processo

Escrever $\cos 30^\circ = \frac{h}{9}$ ou $\sin 60^\circ = \frac{h}{9}$

ou $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{4,5}{h}$ ou $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{4,5}$ 3 pontos

Resolver a igualdade apresentada em ordem a h 2 pontos

Obter o valor de h 1 ponto

Escrever uma expressão da área do triângulo $[ABC]$ 1 ponto

Obter a área desse triângulo 2 pontos

Obter a área do círculo de centro em O 2 pontos

Escrever a subtração entre a área do círculo e a área do triângulo 2 pontos

Apresentar o valor pedido (50 cm^2) 2 pontos

3. 15 pontos

Escrever $\sin(\widehat{ORQ}) = \frac{\sqrt{27}}{OR}$ (ou equivalente) 5 pontos

Substituir \overline{OR} por $12 + \sqrt{27}$ 2 pontos

Obter \overline{OR} (17,1961...) 1 ponto

Obter o valor de $\sin(\widehat{ORQ})$ (0,3021...) 2 pontos

Obter \widehat{ORQ} 2 pontos

Obter $2 \times \widehat{ORQ}$ 1 ponto

Apresentar o valor pedido (35°) 2 pontos

4.1. 5 pontos

Ponto B

4.2. 10 pontos

Obter a razão de semelhança (2) 4 pontos

Calcular o comprimento da circunferência inscrita no triângulo $[ABC]$ 6 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Obter o raio da circunferência inscrita no triângulo 4 pontos

Obter o valor pedido (16,3) 2 pontos

2.º Processo

Obter o comprimento da circunferência circunscrita ao triângulo 1 ponto

Escrever uma expressão do comprimento da circunferência inscrita no triângulo 3 pontos

Obter o valor pedido (16,3) 2 pontos

COTAÇÕES

Grupo	Item					Cotação (em pontos)
	Cotação (em pontos)					
I	1.	2.1.	2.2.			60
	30	10	20			
II	1.	2.				25
	10	15				
III	1.	2.1.1.	2.1.2.	2.2.		55
	20	15	10	10		
IV	1.	2.	3.	4.1.	4.2.	60
	15	15	15	5	10	
TOTAL						200