REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2017

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 11 Páginas

VERSÃO 1

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ $(n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ $(n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$

Página em branco

GRUPO I

1. Considere todos os números naturais de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9

Destes números, quantos são múltiplos de 5 ?

(A) 729 **(B)** 1458 **(C)** 3645 **(D)** 6561

2. Uma turma é constituída por rapazes e por raparigas, num total de 20 alunos.

Sabe-se que:

- $\frac{1}{4}$ dos rapazes tem olhos verdes;
- escolhido, ao acaso, um aluno da turma, a probabilidade de ele ser rapaz e de ter olhos verdes é $\frac{1}{10}$

Quantos rapazes tem a turma?

(A) 4 **(B)** 8 **(C)** 12 **(D)** 16

3. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f

Sabe-se que o único ponto de inflexão do gráfico de f tem abcissa 0

Seja f'' a segunda derivada da função f

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $f''(1)+f''(2)<0$

(B) $f''(-2)+f''(-1)>0$

(C) $f''(-1)\times f''(-2)<0$

(D) $f''(1)\times f''(2)>0$

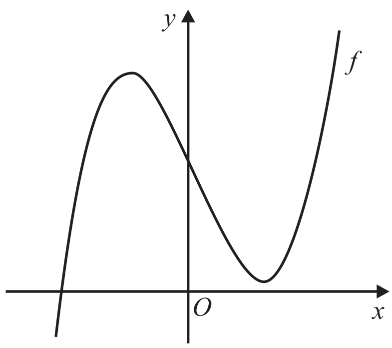

Figura 1

4. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}^+$

Sabe-se que a reta de equação $y=-x$ é assíntota oblíqua do gráfico de f e do gráfico de g

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)\times g(x)}{x}$?

(A) $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** $-\infty$

5. Seja f a função, de domínio A e contradomínio $]-1,+\infty[$, definida por $f(x)=\operatorname{tg} x$

Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto A ?

(A) $\left]-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right[$ **(B)** $\left]\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}\right[$ **(C)** $\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right[$ **(D)** $\left]\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}\right[$

6. Considere, num referencial o.n. xOy, uma reta r de inclinação α

Sabe-se que $\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Qual pode ser a equação reduzida da reta r ?

(A) $y=-5x$ **(B)** $y=4x$ **(C)** $y=-2x$ **(D)** $y=3x$

7. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$\frac{5\pi}{4}\leq \arg(z)\leq\frac{7\pi}{4} \ \wedge\ \operatorname{Im}(z)\geq -1$$

No plano complexo, esta condição define uma região.

Qual é a área dessa região?

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** 1

8. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \begin{cases} n & \text{se } n \leq 20 \\ (-1)^n & \text{se } n > 20 \end{cases}$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é monótona crescente.

(B) A sucessão (u_n) é monótona decrescente.

(C) A sucessão (u_n) é limitada.

(D) A sucessão (u_n) é um infinitamente grande.

GRUPO II

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam

$$z_1 = \frac{1 - 3i^{19}}{1+i} \quad \text{e} \quad z_2 = -3k\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right), \text{ com } k \in \mathbb{R}^+$$

Sabe-se que, no plano complexo, a distância entre a imagem geométrica de z_1 e a imagem geométrica de z_2 é igual a $\sqrt{5}$

Qual é o valor de k ?

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

2. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OPQRSTUV]$

Sabe-se que:

- a face $[OPQR]$ está contida no plano xOy
- o vértice Q pertence ao eixo Oy e o vértice T pertence ao eixo Oz
- o plano STU tem equação $z = 3$

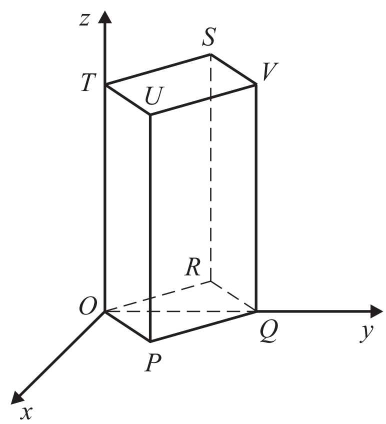

Figura 2

2.1. Seja T' o simétrico do ponto T, relativamente à origem do referencial.

Escreva uma equação da superfície esférica de diâmetro $[TT']$

2.2. Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{UP}.\overrightarrow{RS}$

2.3. Uma equação do plano PQV é $x + y = 2$

Determine uma condição cartesiana que defina a reta TQ

2.4. Escolhem-se, ao acaso, três vértices do prisma.

Determine a probabilidade de o plano definido por esses três vértices ser perpendicular ao plano xOy

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3. Um saco contém n bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a n (com n par e superior a 6).

Retira-se, ao acaso, uma bola do saco.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «o número da bola retirada é menor ou igual a 6»

B: «o número da bola retirada é par»

Escreva o significado de $P(\overline{A} \cup B)$ no contexto da situação descrita e determine uma expressão, em função de n, que dê esta probabilidade.

Apresente a expressão na forma de uma fração.

4. Na Figura 3, está representada uma secção de uma ponte pedonal que liga as duas margens de um rio.

A ponte, representada pelo arco PQ, está suportada por duas paredes, representadas pelos segmentos de reta $[OP]$ e $[RQ]$. A distância entre as duas paredes é 7 metros.

O segmento de reta $[OR]$ representa a superfície da água do rio.

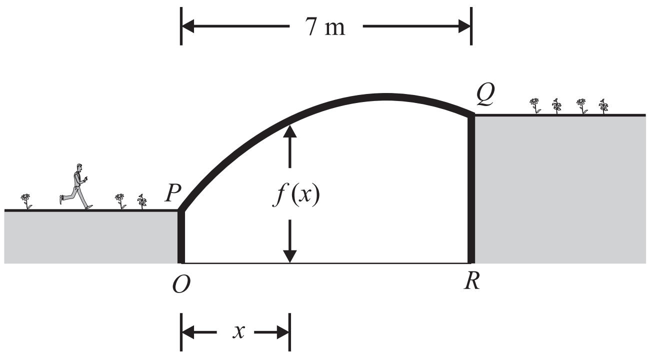

Figura 3

Considere a reta OR como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e em que uma unidade corresponde a 1 metro.

Para cada ponto situado entre O e R, de abcissa x, a distância na vertical, medida em metros, desse ponto ao arco PQ é dada por

$$f(x) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right), \text{ com } x \in [0, 7]$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** recorrendo a métodos analíticos; utilize a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos.

4.1. Seja S o ponto pertencente ao segmento de reta $[OR]$ cuja abcissa x verifica a equação

$$\sqrt{\left(f(0)\right)^2 + x^2} = 2$$

Resolva esta equação, apresentando a solução arredondada às décimas, e interprete essa solução no contexto da situação descrita.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4.2. O clube náutico de uma povoação situada numa das margens do rio possui um barco à vela. Admita que, sempre que esse barco navega no rio, a distância do ponto mais alto do mastro à superfície da água é 6 metros.

Será que esse barco, navegando no rio, pode passar por baixo da ponte?

Justifique a sua resposta.

5. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}} & \text{se } x<1 \\ 2 & \text{se } x=1 \\ 3+\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x} & \text{se } x>1 \end{cases}$$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5.1. Estude a função g quanto à continuidade no ponto 1

5.2. Resolva, no intervalo $]4,5[$, a equação $g(x)=3$

5.3. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g e um triângulo $[OAP]$

Sabe-se que:

- o ponto A é o ponto de abcissa negativa que é a intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas;
- o ponto P é um ponto do gráfico da função g, de abcissa e ordenada negativas;
- a área do triângulo $[OAP]$ é igual a 5

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto P

Apresente o valor obtido arredondado às décimas.

Na sua resposta:

– determine analiticamente a abcissa do ponto A

– equacione o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação.

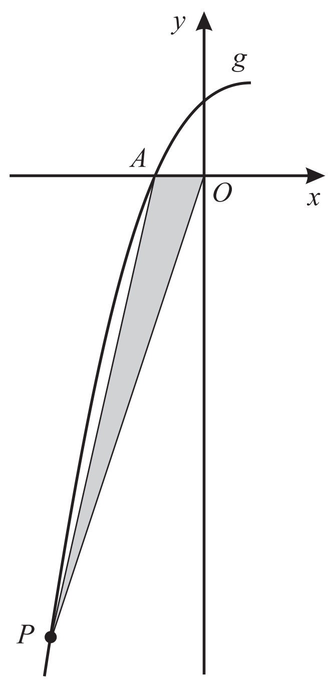

Figura 4

6. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função tal que $f'(x) < 0$, para qualquer número real positivo x

Considere, num referencial o.n. xOy,

- um ponto P, de abcissa a, pertencente ao gráfico de f
- a reta r, tangente ao gráfico de f no ponto P
- o ponto Q, ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox

Sabe-se que $\overline{OP} = \overline{PQ}$

Determine o valor de $f'(a) + \dfrac{f(a)}{a}$

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.** 8 × 5 pontos												**40**
II	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**2.4.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.**	
	15	5	10	15	15	15	15	15	15	15	15	10	**160**
TOTAL													**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

1.ª Fase

VERSÃO 1

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2017

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Critérios de Classificação 11 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. .... (8 × 5 pontos) .... **40 pontos**

Chave:

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	A	B	D	A	B	C	D	C
Versão 2	D	D	B	C	C	A	B	A

GRUPO II

1. .... **15 pontos**

Escrever z_1 na forma algébrica .... 5 pontos

Escrever $1-3i^{19}=1+3i$ .... 1 ponto

Escrever $\dfrac{1+3i}{1+i}=\dfrac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$ .... 1 ponto

Obter z_1 na forma algébrica .... 3 pontos

Escrever z_2 na forma algébrica .... 2 pontos

Escrever $\operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-i$ .... 1 ponto

Obter $z_2=3ki$ .... 1 ponto

OU

Escrever $-3k\operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=3k\operatorname{cis}\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)$ .... 1 ponto

Obter $z_2=3ki$ .... 1 ponto

Obter a condição $4+(1-3k)^2=5$ (ou equivalente) .... 5 pontos

Obter o valor de k $\left(\dfrac{2}{3}\right)$ .... 3 pontos

2.1. .... **5 pontos**

Reconhecer que o ponto T tem cota igual a 3 .... 1 ponto

Concluir que o centro da superfície esférica é a origem do referencial .... 1 ponto

Concluir que o raio da superfície esférica é 3 .... 1 ponto

Escrever a equação pedida $\left(x^2+y^2+z^2=9 \text{ ou equivalente}\right)$ (**ver nota**) ... 2 pontos

Nota – Se for apresentada apenas a condição $x^2+y^2+z^2=9$ (ou equivalente), a classificação a atribuir à resposta é 5 pontos.

2.2. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $\|\overrightarrow{UP}\| = \|\overrightarrow{RS}\| = 3$ .... 3 pontos

Escrever $\cos(\overrightarrow{UP} \hat{\ } \overrightarrow{RS}) = -1$ .... 5 pontos

Obter o valor de $\overrightarrow{UP} . \overrightarrow{RS}$ (-9) .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $\overrightarrow{UP} = (0, 0, -3)$ .... 4 pontos

Escrever $\overrightarrow{RS} = (0, 0, 3)$ .... 4 pontos

Obter o valor de $\overrightarrow{UP} . \overrightarrow{RS}$ (-9) .... 2 pontos

Nota – Se a resposta se limitar à escrita de $\overrightarrow{UP} . \overrightarrow{RS} = -3 \times 3 = -9$, a classificação a atribuir é 10 pontos.

2.3. .... **15 pontos**

Escrever as coordenadas do ponto T .... 2 pontos

Obter as coordenadas do ponto Q .... 4 pontos

Determinar as coordenadas de um vetor diretor da reta TQ .... 2 pontos

Obter uma condição cartesiana da reta TQ .... 7 pontos

Escrever $x = 0$ .... 3 pontos

Escrever $\frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}$ .... 3 pontos

Escrever uma condição cartesiana da reta TQ

$\left(x = 0 \ \wedge \ \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ (**ver nota**) .... 1 ponto

Nota – Se uma das duas etapas imediatamente anteriores a esta tiver sido pontuada com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2.4. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^{8}C_{3}$ (**ver nota 1**) .... 6 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: $6 \times {}^{4}C_{3}$ (**ver nota 2**) .... 8 pontos

Obter a probabilidade pedida $\left(\frac{3}{7}\right)$ (**ver nota 4**) .... 1 ponto

2.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^{8}A_3$ (**ver nota 1**) .... 6 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: $6 \times {}^{4}A_3$ (**ver nota 3**) .... 8 pontos

Obter a probabilidade pedida $\left(\frac{3}{7}\right)$ (**ver nota 4**) .... 1 ponto

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{8}C_3$ (1.º processo de resolução) ou a ${}^{8}A_3$ (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada for ${}^{4}C_3$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto. Caso a expressão apresentada seja do tipo $k\,{}^{4}C_3$, com $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 3 pontos. Caso a expressão apresentada seja incorreta e diferente das expressões referidas, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
3. Se a expressão apresentada for ${}^{4}A_3$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto. Caso a expressão apresentada seja do tipo $k\,{}^{4}A_3$, com $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 3 pontos. Caso a expressão apresentada seja incorreta e diferente das expressões referidas, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
4. Se as etapas relativas ao número de casos possíveis e ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. Caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0, 1]$, a pontuação a atribuir nesta etapa também é 0 pontos.

3. .... **15 pontos**

Escrever o significado de $P\left(\overline{A} \cup B\right)$ no contexto da situação descrita (É a probabilidade de o número da bola retirada ser maior do que 6 ou ser par.) ...... 5 pontos

Apresentar a expressão pedida $\left(\frac{n-3}{n}\right)$ .... 10 pontos

A expressão pedida pode ser obtida por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Referir que $P\left(\overline{A} \cup B\right) = 1 - P\left(A \cap \overline{B}\right)$ .... 4 pontos

Determinar $P\left(A \cap \overline{B}\right)$, em função de n $\left(\frac{3}{n}\right)$ .... 5 pontos

Obter $P\left(\overline{A} \cup B\right) = \frac{n-3}{n}$ .... 1 ponto

2.º Processo

Determinar $P(\overline{A})$, em função de n $\left(\frac{n-6}{n}\right)$ .... 2 pontos

Determinar $P(B)$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 2 pontos

Determinar $P(\overline{A} \cap B)$, em função de n $\left(\frac{n-6}{2n}\right)$ .... 3 pontos

Escrever $P(\overline{A} \cup B) = \frac{n-6}{n} + \frac{1}{2} - \frac{n-6}{2n}$ .... 2 pontos

Obter $P(\overline{A} \cup B) = \frac{n-3}{n}$ .... 1 ponto

3.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis, em função de n (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis, em função de n (**ver nota 2**) .... 7 pontos

Escrever a expressão pedida (**ver nota 3**) .... 1 ponto

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for n, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se for apresentada apenas a expressão $n-3$, sem qualquer justificação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 5 pontos.
3. Se as etapas relativas ao número de casos possíveis e ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

4.1. .... **15 pontos**

Escrever $\sqrt{\left(f(0)\right)^2 + x^2} = 2 \Leftrightarrow \left(f(0)\right)^2 + x^2 = 4$ .... 3 pontos

Determinar $f(0)$ .... 2 pontos

Obter a solução da equação, arredondada às décimas $(1{,}5)$ .... 5 pontos

Interpretar a solução no contexto da situação descrita (Na secção representada, $1{,}5$ é a abcissa do ponto da superfície da água do rio que dista dois metros do ponto P) .... 5 pontos

4.2. .... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) .... 4 pontos

Determinar o zero de f' .... 4 pontos

Escrever $f'(x) = 0$ .... 1 ponto

Obter o zero de f' .... 3 pontos

Justificar que a função f atinge um máximo para $x = 5$ .... 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f (ou equivalente) .... 2 pontos

Concluir que a função tem um máximo para $x = 5$ .... 1 ponto

Determinar $f(5)$ (4) .... 2 pontos

Responder à questão (Não, o barco não pode passar por baixo da ponte.) .... 2 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

5.1. .... **15 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$ .... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(1+x)(1-x)}{1-e^{x-1}}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(1+x)(1-x)}{1-e^{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1^-} (1+x) \times \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-x}{1-e^{x-1}}$ .. 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^-} (1+x) \times \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-x}{1-e^{x-1}} = 2 \times \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-x}{1-e^{x-1}}$ ... 1 ponto

Escrever $2 \times \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-x}{1-e^{x-1}} = 2 \times \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{e^{x-1}-1}$ .... 1 ponto

Escrever $2 \times \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{e^{x-1}-1} \underset{y\,=\,x\,-\,1}{=} 2 \times \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{y}{e^{y}-1}$ .... 1 ponto

Escrever $2 \times \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{y}{e^{y}-1} = 2 \times \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{1}{\frac{e^{y}-1}{y}}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = 2$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ .... 5 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(3 + \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right)$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(3 + \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right) = 3 - \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}$ .... 1 ponto

Escrever $3 - \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} \underset{y\,=\,x\,-\,1}{=} 3 - \lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} y}{y}$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 2$ .... 1 ponto

Referir que $g(1) = 2$ .... 1 ponto

Concluir que a função g é contínua no ponto 1 .... 1 ponto

5.2. .... **15 pontos**

Escrever $g(x) = 3 \Leftrightarrow 3 + \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x} = 3$ .... 1 ponto

Escrever $3 + \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x} = 3 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x-1) = 0$ .... 4 pontos

Escrever $\operatorname{sen}(x-1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ .... 4 pontos

Escrever $x - 1 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ .... 2 pontos

Obter a solução da equação pertencente ao intervalo $]4, 5[$ $(1+\pi)$ .... 4 pontos

5.3. .... **15 pontos**

Determinar a abcissa do ponto A .... 4 pontos

Equacionar o problema $\left(\dfrac{1 \times \dfrac{x^2-1}{1-e^{x-1}}}{2} = 5 \text{ ou equivalente} \right)$ (**ver nota 1**) ...... 5 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 2**) .... 3 pontos

Apresentar a abcissa do ponto P $(-3{,}3)$ .... 3 pontos

Notas:

1. Se a equação apresentada for $\dfrac{1 \times \dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}}}{2} = 5$ (ou equivalente), a pontuação a atribuir nesta etapa é 3 pontos.
2. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

6. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos.

1.º Processo

Identificar as coordenadas do ponto P $\left(a, f(a)\right)$ .... 1 ponto

Escrever uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a $\left(y = f'(a)\,x + f(a) - a\,f'(a)\right)$ .... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto Q $\left(a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}, 0\right)$ .... 2 pontos

Escrever $\overline{OP} = \sqrt{a^2 + \left(f(a)\right)^2}$ .... 1 ponto

Escrever $\overline{PQ} = \sqrt{\left(\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right)^2 + \left(f(a)\right)^2}$ .... 1 ponto

Obter o valor pedido (0) .... 3 pontos

2.º Processo

Identificar as coordenadas do ponto P $\left(a, f(a)\right)$ .... 1 ponto

Escrever uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a $\left(y = f'(a)\,x + f(a) - a\,f'(a)\right)$ .... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto Q $\left(a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}, 0\right)$ .... 2 pontos

Concluir que $a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} = 2a$ .... 3 pontos

Obter o valor pedido (0) .... 2 pontos

3.º Processo

Designemos por α a amplitude do ângulo POQ e por β a inclinação da reta r

Referir que $\operatorname{tg}\beta = f'(a)$ .... 1 ponto

Referir que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{f(a)}{a}$ .... 3 pontos

Referir que $\beta = \pi - \alpha$ .... 3 pontos

Concluir que $f'(a) = -\dfrac{f(a)}{a}$ .... 2 pontos

Obter o valor pedido (0) .... 1 ponto

4.º Processo

Identificar as coordenadas do ponto $P\ \left(a, f(a)\right)$ .... 1 ponto

Identificar as coordenadas do ponto $Q\ \left(2a, 0\right)$ .... 3 pontos

Obter o declive da reta PQ .... 3 pontos

Concluir que $f'(a) = -\dfrac{f(a)}{a}$ .... 2 pontos

Obter o valor pedido (0) .... 1 ponto

COTAÇÕES

Grupo	Item												
	Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.**												
	8 × 5 pontos												**40**
II	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**2.4.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.**	
	15	5	10	15	15	15	15	15	15	15	15	10	**160**
TOTAL													**200**