REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2017

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 10 Páginas

VERSÃO 1

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n(x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Página em branco

GRUPO I

1. Considere todos os números naturais de cinco algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos $1, 2, 3, 4$ e 5

Destes números, quantos têm os algarismos pares um a seguir ao outro?

(A) 24 **(B)** 48 **(C)** 72 **(D)** 96

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(X > 1 \mid X \leq 3)$?

(A) $\frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{8}{9}$ **(D)** $\frac{5}{9}$

3. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio, sabe-se que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = 4$

Qual é o valor de $f'(2)$?

(A) $-\frac{1}{2}$ **(B)** $-\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{1}{4}$

4. Na Figura 1, está representado o gráfico de uma função f, de domínio $[-1, 6]$, e, na Figura 2, está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$

Tal como as figuras sugerem, em ambas as funções, todos os objetos inteiros têm imagens inteiras.

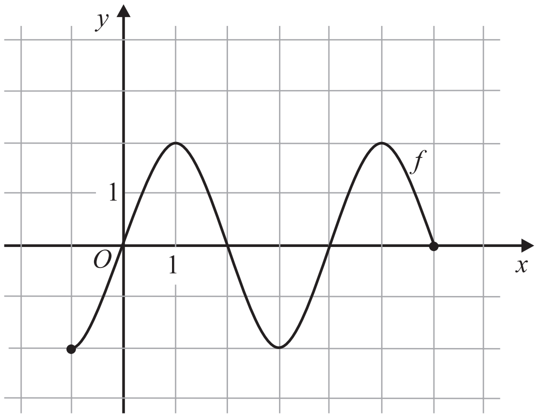

Figura 1

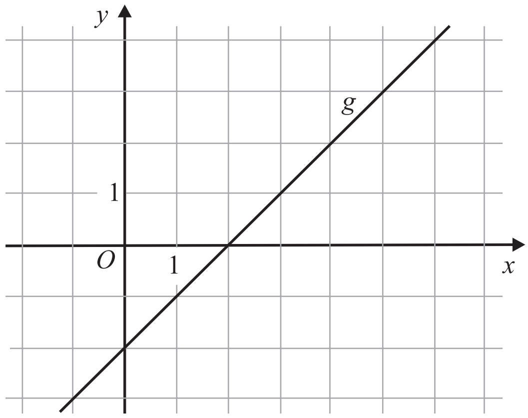

Figura 2

Quais são os zeros da função $g \circ f$?

(o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

(A) 0 e 4 **(B)** 1 e 5 **(C)** -1 e 3 **(D)** 2 e 6

5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$

A tabela de variação de sinal da função f'', segunda derivada de f, é a seguinte.

x	$-\infty$	-10		0		10	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Seja g a função definida por $g(x) = -f(x-5)$

Em qual dos intervalos seguintes o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo?

(A) $]-15, -5[$ **(B)** $]0, 10[$ **(C)** $]-5, 5[$ **(D)** $]5, 15[$

6. Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{5}$

Qual dos seguintes valores é um argumento do número complexo $-5iz$?

(A) $-\frac{3\pi}{10}$ **(B)** $-\frac{4\pi}{5}$ **(C)** $-\frac{7\pi}{5}$ **(D)** $-\frac{13\pi}{10}$

7. Considere, num referencial o.n. xOy, a região definida pela condição

$$(x+1)^2+(y+1)^2 \leq 1 \quad \wedge \quad x+y+2 \geq 0$$

Qual é o perímetro dessa região?

(A) $\pi+1$ **(B)** $\frac{\pi}{2}+1$ **(C)** $\pi+2$ **(D)** $\frac{\pi}{2}+2$

8. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$

(B) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2

(C) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$

(D) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão 2

GRUPO II

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam z_1 e z_2 tais que $z_1 = 2 + i$ e $z_1 \times \overline{z_2} = 4 - 3i$

Considere a condição $|z - z_1| = |z - z_2|$

Mostre que o número complexo $\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$ verifica esta condição e interprete geometricamente este facto.

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

2. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$

Sabe-se que:

- a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy
- a aresta $[CD]$ está contida no eixo Oy
- o ponto D tem coordenadas $(0, 4, 0)$
- o plano ACG é definido pela equação $x + y - z - 6 = 0$

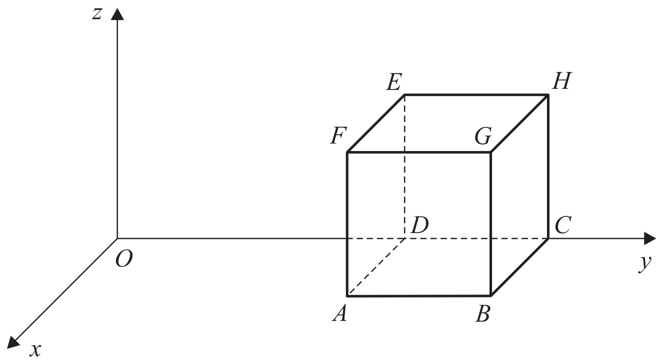

Figura 3

2.1. Verifique que o vértice A tem abcissa igual a 2

2.2. Seja r a reta definida pela condição $x - 1 = 1 - y = z$

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ACG

2.3. Seja P o vértice de uma pirâmide regular de base $[EFGH]$

Sabe-se que:

- a cota do ponto P é superior a 2
- o volume da pirâmide é 4

Determine a amplitude do ângulo OGP

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

3. Uma escola secundária tem alunos de ambos os sexos.

3.1. Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.

Seja A o acontecimento «o aluno escolhido é rapariga», e seja B o acontecimento «o aluno escolhido frequenta o 10.º ano».

Sabe-se que:

- a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz ou não frequentar o 10.º ano é $0{,}82$
- a probabilidade de o aluno escolhido frequentar o 10.º ano, sabendo que é rapariga, é $\frac{1}{3}$

Determine $P(A)$

3.2. Uma das turmas dessa escola tem trinta alunos, numerados de 1 a 30

Com o objetivo de escolher quatro alunos dessa turma para formar uma comissão, introduzem-se, num saco, trinta cartões, indistinguíveis ao tato, numerados de 1 a 30. Em seguida, retiram-se quatro cartões do saco, simultaneamente e ao acaso.

Qual é a probabilidade de os dois menores números saídos serem o 7 e o 22 ?

Apresente o resultado arredondado às milésimas.

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Resolva os itens **4.1.**, **4.2.** e **4.3.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados.

4.2. Resolva a inequação $f(x) > 2\ln x$

Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

4.3. Para um certo número real k, a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{k}{x} + f(x)$, tem um extremo relativo para $x = 1$

Determine esse número k

5. Considere o desenvolvimento de $\left(2x\,\text{sen}\,\alpha + \frac{\cos\alpha}{x}\right)^2$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$

Determine os valores de α, pertencentes ao intervalo $]\pi, 2\pi[$, para os quais o termo independente de x, neste desenvolvimento, é igual a 1

Resolva este item recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

6. Num jardim, uma criança está a andar num baloiço cuja cadeira está suspensa por duas hastes rígidas. Atrás do baloiço, há um muro que limita esse jardim.

A Figura 4 esquematiza a situação. O ponto P representa a posição da cadeira.

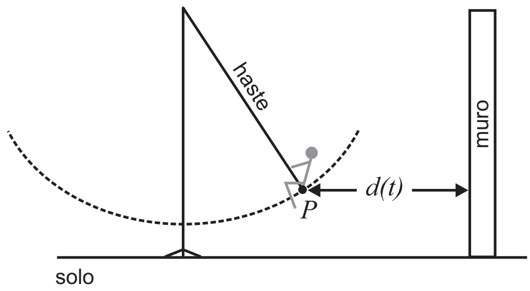

Figura 4

Num determinado instante, em que a criança está a dar balanço, é iniciada a contagem do tempo. Doze segundos após esse instante, a criança deixa de dar balanço e procura parar o baloiço arrastando os pés no chão.

Admita que a distância, em decímetros, do ponto P ao muro, t segundos após o instante inicial, é dada por

$$d(t)=\begin{cases} 30+t\,\text{sen}(\pi t) & \text{se } 0\leq t<12 \\ 30+12e^{12-t}\,\text{sen}(\pi t) & \text{se } t\geq 12 \end{cases}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos)

6.1. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o número de soluções da equação $d(t)=27$ no intervalo $[0, 6]$, e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema.

6.2. Admita que, no instante em que é iniciada a contagem do tempo, as hastes do baloiço estão na vertical e que a distância do ponto P ao chão, nesse instante, é 4 dm

Treze segundos e meio após o instante inicial, a distância do ponto P ao chão é $4{,}2$ dm

Qual é o comprimento da haste?

Apresente o resultado em decímetros, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.** 8 × 5 pontos												**40**
II	**1.** 15	**2.1.** 5	**2.2.** 10	**2.3.** 15	**3.1.** 15	**3.2.** 15	**4.1.** 15	**4.2.** 15	**4.3.** 15	**5.** 15	**6.1.** 15	**6.2.** 10	**160**
TOTAL													**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

2.ª Fase

VERSÃO 1

REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2017

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Critérios de Classificação 10 Páginas

VERSÃO DE TRABALHO

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

VERSÃO DE TRABALHO

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

VERSÃO DE TRABALHO

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

VERSÃO DE TRABALHO

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. .... (8 × 5 pontos) .... **40 pontos**

Chave:

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	D	C	B	C	A	C	B
Versão 2	D	B	A	C	B	B	A	D

GRUPO II

1. .... **15 pontos**

Escrever z_2 na forma algébrica .... 6 pontos

Escrever $\overline{z_2} = \frac{4-3i}{2+i}$ .... 1 ponto

Escrever $\frac{4-3i}{2+i} = \frac{(4-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$ .... 1 ponto

Obter $\overline{z_2} = 1-2i$ .... 3 pontos

Concluir que $z_2 = 1+2i$ .... 1 ponto

OU

Seja $z_2 = x + yi$

Escrever $(2+i)(\overline{x+yi}) = 4-3i$ .... 1 ponto

Escrever $(2+i)(x-yi) = 4-3i$ .... 1 ponto

Obter $2x + y + i(x-2y) = 4-3i$ .... 1 ponto

Escrever $2x + y = 4 \ \wedge \ x - 2y = -3$ .... 1 ponto

Concluir que $z_2 = 1+2i$ .... 2 pontos

Escrever $\sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{\pi}{4} = 1+i$ .... 1 ponto

Verificar que $|1+i-(2+i)| = |1+i-(1+2i)|$ .... 3 pontos

Interpretar geometricamente o pretendido (por exemplo, «A imagem geométrica de $\sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{\pi}{4}$ é equidistante das imagens geométricas de z_1 e de z_2») .... 5 pontos

2.1. .... **5 pontos**

Identificar os valores da ordenada e da cota do ponto A .... 2 pontos

Escrever $x + 4 - 0 - 6 = 0$ .... 2 pontos

Obter $x = 2$ .... 1 ponto

VERSÃO DE TRABALHO

2.2. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo (recorrendo à condição $x-1=1-y=z$)

Escrever o sistema $\begin{cases} x-1=1-y \\ 1-y=z \\ x+y-z-6=0 \end{cases}$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Obter as coordenadas do ponto de intersecção $\left((-3,5,-4)\right)$ .... 6 pontos

2.º Processo (recorrendo a uma equação vetorial da reta r)

Indicar um vetor diretor da reta r .... 2 pontos

Indicar as coordenadas de um ponto da reta r .... 1 ponto

Escrever uma equação vetorial da reta r
$\left(\text{por exemplo, } (x,y,z)=(1,1,0)+k(1,-1,1),\ k\in\mathbb{R}\right)$ .... 2 pontos

Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta r, em função de k ... 2 pontos

Obter uma equação na variável k, substituindo x, y e z, na equação do plano ACG, pelas coordenadas de um ponto genérico da reta r .... 1 ponto

Obter o valor de k .... 1 ponto

Obter as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ACG
$\left((-3,5,-4)\right)$ .... 1 ponto

2.3. .... **15 pontos**

Determinar a altura da pirâmide .... 2 pontos

Escrever as coordenadas do ponto P .... 2 pontos

Escrever as coordenadas do ponto G .... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GO}$ .... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GP}$ .... 1 ponto

Calcular $\overrightarrow{GO}\,.\,\overrightarrow{GP}$ .... 2 pontos

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{GO}$ .... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{GP}$ .... 1 ponto

Escrever a equação $2=\sqrt{44}\times\sqrt{11}\times\cos\left(O\widehat{G}P\right)$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter a amplitude do ângulo OGP $(85°)$ .... 2 pontos

VERSÃO DE TRABALHO

3.1. .... **15 pontos**

Escrever $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}82$ .... 3 pontos

Escrever $P(B \mid A) = \frac{1}{3}$ .... 2 pontos

Escrever $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B})$ .... 3 pontos

Obter $P(A \cap B)$ .... 3 pontos

Escrever $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ .... 1 ponto

Obter $P(A)$ $(0{,}54)$ .... 3 pontos

3.2. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^{30}C_4$ (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: ${}^{8}C_2$ (**ver nota 2**) .... 9 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 3**) $(0{,}001)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^{30}A_4$ (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: ${}^{4}A_2 \times {}^{8}A_2$ (ou ${}^{8}C_2 \times 4!$)
(**ver nota 2**) .... 11 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 3**) $(0{,}001)$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{30}C_4$ (1.º processo de resolução) ou a ${}^{30}A_4$ (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{8}C_2$ (1.º processo de resolução) ou a ${}^{4}A_2 \times {}^{8}A_2$ (ou ${}^{8}C_2 \times 4!$) (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
3. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A pontuação de 0 pontos também deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0, 1]$

VERSÃO DE TRABALHO

4.1. .... **15 pontos**

Justificar que apenas a reta de equação $x=0$ pode ser assíntota vertical do gráfico da função f .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ .... 7 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{-\infty}{0^+}$ .... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ .... 3 pontos

Concluir que a reta de equação $x=0$ é assíntota vertical do gráfico de f .... 2 pontos

Determinar $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ .... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ .... 2 pontos

Concluir que a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de f .... 2 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, a classificação a atribuir à resposta é desvalorizada em 2 pontos. Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, a resposta é classificada com 0 pontos.

4.2. .... **15 pontos**

Escrever $f(x) > 2\ln x \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} > 2\ln x$ .... 1 ponto

Escrever $\dfrac{\ln x}{x} > 2\ln x \Leftrightarrow \ln x > 2x\ln x$ .... 2 pontos

Escrever $\ln x > 2x\ln x \Leftrightarrow \ln x - 2x\ln x > 0$ .... 2 pontos

Escrever $\ln x - 2x\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x(1-2x) > 0$ .... 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal (ou equivalente) (**ver nota**) .... 5 pontos

Apresentar o conjunto solução $\left(\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[\right)$ .... 2 pontos

Nota – Se, na primeira linha do quadro, a resposta apresentar $-\infty$, em vez de 0, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é 3 pontos.

VERSÃO DE TRABALHO

4.3. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar $g'(x)$, em função de k .... 5 pontos

Determinar $g'(1)$, em função de k .... 3 pontos

Escrever $g'(1)=0$ .... 5 pontos

Obter o valor de k (1) .... 2 pontos

2.º Processo

Determinar $g'(x)$, em função de k .... 5 pontos

Escrever $g'(x)=0$ .... 2 pontos

Obter $x=e^{1-k}$ (ou equivalente) .... 5 pontos

Obter o valor de k (1) .... 3 pontos

5. .... **15 pontos**

Escrever $\left(2x\operatorname{sen}\alpha+\frac{\cos\alpha}{x}\right)^2=4x^2\operatorname{sen}^2\alpha+4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\frac{\cos^2\alpha}{x^2}$ .... 1 ponto

Escrever $4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=1$ .... 3 pontos

Escrever $\operatorname{sen}(2\alpha)=\frac{1}{2}$ .... 4 pontos

Escrever $\operatorname{sen}(2\alpha)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\alpha=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee 2\alpha=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ .... 3 pontos

Obter os valores de α $\left(\frac{13\pi}{12}\text{ e }\frac{17\pi}{12}\right)$ .... 4 pontos

6.1. .... **15 pontos**

Escrever $30+t\operatorname{sen}(\pi t)=27$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota**) .... 4 pontos

Indicar o número de soluções da equação $d(t)=27$ (4) .... 4 pontos

Interpretar o resultado no contexto da situação descrita (Durante os primeiros seis segundos, a cadeira encontra-se por quatro vezes a uma distância de 27 dm do muro.) .... 5 pontos

Nota – Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

VERSÃO DE TRABALHO

6.2. .... **10 pontos**

Determinar $d(0)$ .... 1 ponto

Determinar $d(13,5)$ .... 1 ponto

Determinar $d(0) - d(13,5)$ .... 2 pontos

Equacionar o problema $(x^2 = (x - 0{,}2)^2 + 2{,}68^2$ ou equivalente) .... 3 pontos

Resolver a equação .... 2 pontos

Apresentar o comprimento da haste $(18\ \mathrm{dm})$ .... 1 ponto

VERSÃO DE TRABALHO

COTAÇÕES

Grupo	Item / Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.** — 8 × 5 pontos												**40**
II	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	
	15	5	10	15	15	15	15	15	15	15	15	10	**160**
TOTAL													**200**