REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2017

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 11 Páginas

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, e assinale os pontos relevantes para a resolução (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Página em branco

GRUPO I

A panificadora *MILHAFRE* fabrica diferentes tipos de pão, que são distribuídos pelas pastelarias e mercearias das povoações mais próximas.

1. A *MILHAFRE* produz diariamente, entre outros, dois tipos de pão de mistura, A e B, fabricados com farinha de trigo e farinha de centeio.

O fabrico de cada pão do tipo A requer $0{,}06\ \mathrm{kg}$ de farinha de trigo e $0{,}03\ \mathrm{kg}$ de farinha de centeio. Cada pão deste tipo dá um lucro de $0{,}25$ euros.

O fabrico de cada pão do tipo B requer $0{,}075\ \mathrm{kg}$ de farinha de trigo e $0{,}02\ \mathrm{kg}$ de farinha de centeio. Cada pão deste tipo dá um lucro de $0{,}20$ euros.

Num certo dia, a *MILHAFRE* dispõe de $6{,}9\ \mathrm{kg}$ de farinha de trigo e de $2{,}4\ \mathrm{kg}$ de farinha de centeio para fabricar estes dois tipos de pão.

Admita que, nesse dia, uma certa pastelaria compra todos os pães dos tipos A e B produzidos pela *MILHAFRE*.

Determine o número de pães do tipo A e o número de pães do tipo B que a *MILHAFRE* deve fabricar, nesse dia, de modo a ter o maior lucro possível nessa venda.

Na sua resposta, designe por x o número de pães do tipo A e por y o número de pães do tipo B fabricados, nesse dia, pela *MILHAFRE*, e percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

– indicar a função objetivo;

– indicar as restrições do problema;

– representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;

– apresentar o valor de x e o valor de y que são a solução do problema.

2. A panificadora *MILHAFRE* também fabrica outros três tipos de pão: C, D e E.

Os preços de venda destes três tipos de pão são os seguintes:

Tipo C – $1{,}60$ euros por unidade;

Tipo D – 1 euro por unidade;

Tipo E – $1{,}35$ euros por unidade.

Depois de fabricados, os pães são colocados em caixas.

Numa das caixas, que apenas contém pães destes três tipos, metade dos pães são do tipo C. A outra metade é constituída por igual número de pães do tipo D e de pães do tipo E.

Admita que todos os pães têm forma e tamanho idênticos.

Retira-se, ao acaso, um pão dessa caixa.

Seja X o preço de venda desse pão.

Determine o valor médio da variável aleatória X

Apresente o resultado em euros, arredondado às centésimas.

Na sua resposta, comece por apresentar a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X

3. Admita que o volume de cada pão do tipo C, medido em centímetros cúbicos, segue uma distribuição normal de valor médio 500 e desvio padrão 15

Para que um pão deste tipo possa ser corretamente embalado, o seu volume tem de estar compreendido entre $485\ \text{cm}^3$ e $530\ \text{cm}^3$

Escolhe-se, ao acaso, um pão do tipo C.

Determine a probabilidade de o pão escolhido **não** poder ser corretamente embalado, por não cumprir os requisitos relativos ao volume.

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

GRUPO II

Um laboratório possui dois reservatórios de água.

1. Considere que, inicialmente, um dos reservatórios está cheio de água, isto é, a altura da água é igual à altura do reservatório, e que, num certo instante, se abre uma válvula e o reservatório começa a ser esvaziado.

Admita que a altura da água, em metros, nesse reservatório, t horas após este ter começado a ser esvaziado e até ao instante em que fica vazio, é dada por

$$h(t) = 2{,}15 + \ln(8{,}9 - 0{,}51\,t)$$

Determine ao fim de quanto tempo, após o início do esvaziamento, a altura da água é igual a metade da altura do reservatório.

Apresente o resultado em horas, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Admita que, no laboratório, o outro reservatório está igualmente cheio de água e também vai ser esvaziado.

Neste reservatório, foi instalada uma bóia à superfície da água, ligada a um instrumento de registo de dados.

A partir do instante em que o reservatório começou a ser esvaziado, foram enviados, da bóia para o instrumento de registo, dados relativos ao tempo, x, em horas, decorrido após o início do esvaziamento e à correspondente altura, y, em metros, da água. Alguns desses dados são apresentados na tabela seguinte.

Tempo, em horas, decorrido após o início do esvaziamento (x)	0,32	1,47	3,85	4,29	4,76	5,01	5,86
Altura, em metros, da água (y)	4,18	3,62	2,78	2,18	1,79	1,72	0,35

Considere válido um modelo de regressão cúbica, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, obtido a partir dos registos apresentados na tabela.

Estime, com base nesse modelo, a previsão da altura da água, decorridas seis horas após o início do esvaziamento.

Na sua resposta, apresente os valores de a, b, c e d arredondados às milésimas.

Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

GRUPO III

Em Portugal, a utilização da bicicleta como meio de transporte nos centros urbanos é cada vez mais comum.

1. O Vicente comprou uma bicicleta.

Admita que o valor da bicicleta do Vicente, t anos após ter sido comprada, é dado, em euros, aproximadamente, por

$$V(t) = 999{,}9 \times 0{,}83^{t} \qquad (t \geq 0)$$

1.1. Qual é o valor da bicicleta do Vicente meio ano após ter sido comprada?

Apresente o resultado em euros, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

1.2. Ao fim de quanto tempo, após a compra, o valor da bicicleta do Vicente é 374 euros?

Apresente o resultado em anos, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

1.3. Determine o valor de $\dfrac{V(3) - V(0)}{3}$, aproximado às unidades, e interprete esse valor no contexto do problema.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2. Na Figura 1, está representada a roda da frente da bicicleta do Vicente, na qual foi instalado um refletor.

O Vicente pedala numa estrada sem curvas e mantendo uma velocidade constante. Num certo instante, inicia-se a contagem do tempo.

Sabe-se que, t segundos após esse instante, a distância do refletor ao solo é dada, em centímetros, por

$$d(t) = 20 + a\cos(bt)\,, \text{ com } t \geq 0$$

em que $a \in \mathbb{R}$ e $b \in [0, 12]$

O argumento da função cosseno está em radianos.

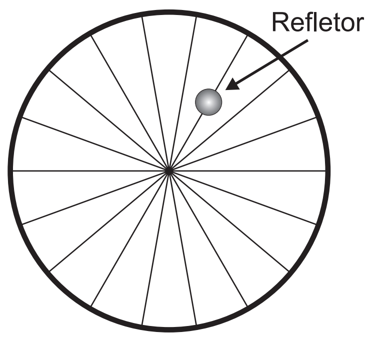

Figura 1

2.1. Sabe-se que, no instante inicial, a distância do refletor ao solo é 30 cm e que, $0{,}15$ segundos após esse instante, essa distância passou a ser 20 cm

Determine o valor de a e o valor de b

Apresente o valor de b arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.2. Na Figura 2, está representado o gráfico da função T, que dá a taxa de variação instantânea da função d, para cada valor de t pertencente ao intervalo $[0{,}1\,;\,0{,}8]$

Sabe-se que, neste intervalo, $0{,}3$ e $0{,}6$ são os únicos zeros da função T

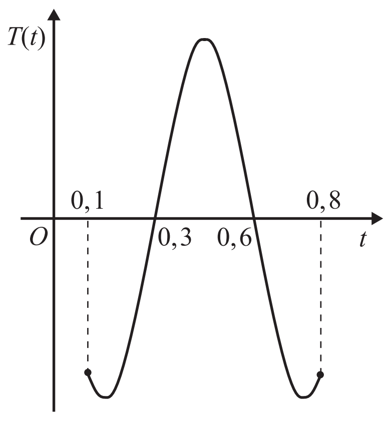

Figura 2

Interprete, no contexto do problema, os valores $0{,}3$ e $0{,}6$

GRUPO IV

O clube naval de uma certa cidade possui alguns barcos à vela.

1. A Figura 3 é uma fotografia de um barco à vela desse clube.

Na Figura 4, está representado um esquema das duas velas que se podem observar na fotografia.

Figura 3

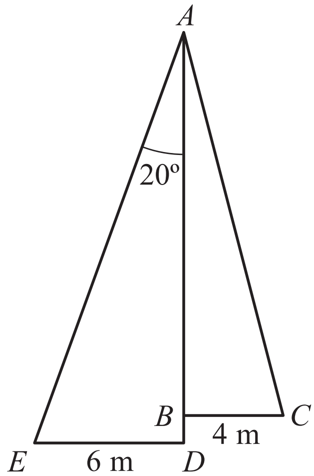

Figura 4

Relativamente à Figura 4, que não está desenhada à escala, sabe-se que:

- o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, e o triângulo $[ADE]$ é retângulo em D
- $\overline{BC} = 4\text{ m}$ e $\overline{ED} = 6\text{ m}$
- $E\hat{A}D = 20^{\circ}$

1.1. Admita que a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 31 m^2

Determine $\overline{BD}$

Apresente o resultado em metros, arredondado às centésimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1.2. Admita agora que $\overline{BD} = 1\text{ m}$

Considere um referencial ortogonal e monométrico, xOy, cuja origem coincide com o ponto B da Figura 4 e em que a unidade é 1 metro. Nesse referencial, o ponto C pertence ao semieixo positivo Ox e o ponto A pertence ao semieixo positivo Oy

Seja E' o simétrico do ponto E relativamente ao eixo Ox

Quais são as coordenadas do ponto E' ?

2. O clube naval promove, durante o mês de agosto, um curso de iniciação à vela. De acordo com as regras do curso, na parte prática, cada participante deve navegar, em cada dia do mês, um certo número de milhas marítimas.

Mais precisamente, cada participante deve navegar uma milha marítima no primeiro dia do mês, uma milha e meia no segundo dia, duas milhas no terceiro dia, e assim sucessivamente, até ao dia 31 de agosto. Assim sendo, em cada dia, após o primeiro, cada participante deve navegar mais meia milha marítima do que no dia anterior.

2.1. Mostre que o número total de milhas marítimas que cada participante deve navegar, nos n primeiros dias do mês de agosto, é dado por

$$\frac{n^2 + 3n}{4}$$

2.2. Determine o dia do mês em que, de acordo com as regras do curso, o número total de milhas marítimas navegadas por cada participante, até esse dia, inclusive, ultrapassa, pela primeira vez, uma centena.

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item Cotação (em pontos)					
I	**1.** 30	**2.** 15	**3.** 15			**60**
II	**1.** 15	**2.** 15				**30**
III	**1.1.** 10	**1.2.** 10	**1.3.** 10	**2.1.** 20	**2.2.** 10	**60**
IV	**1.1.** 15	**1.2.** 10	**2.1.** 15	**2.2.** 10		**50**
TOTAL						**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 735

1.ª Fase

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2017

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Critérios de Classificação 11 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens com cotação igual ou superior a 20 pontos e que envolvam a produção de um texto tem em conta a clareza, a organização dos conteúdos e a utilização do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e aos itens de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.

Situação	Classificação
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.

Situação	Classificação
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. .... **30 pontos**

Identificar a função objetivo $(L(x, y) = 0{,}25x + 0{,}2y)$ .... 2 pontos

Indicar as restrições (**ver nota 1**) .... 10 pontos

- $0{,}06x + 0{,}075y \leq 6{,}9$ (ou equivalente) (**ver notas 2** e **3**) .... 4 pontos
- $0{,}03x + 0{,}02y \leq 2{,}4$ (ou equivalente) (**ver notas 2** e **3**) .... 4 pontos
- $x \geq 0$ .... 1 ponto
- $y \geq 0$ .... 1 ponto

Representar graficamente a região admissível .... 7 pontos

- Representar graficamente a reta de equação $0{,}06x + 0{,}075y = 6{,}9$ .... 2 pontos
- Representar graficamente a reta de equação $0{,}03x + 0{,}02y = 2{,}4$ .... 2 pontos
- Assinalar o polígono .... 3 pontos

Obter as coordenadas do vértice do polígono que não pertence aos eixos coordenados $((40, 60))$ .... 4 pontos

Obter as coordenadas dos vértices do polígono que pertencem aos eixos coordenados, com exceção da origem $((80, 0)$ e $(0, 92))$ .... (1+1) .... 2 pontos

Calcular o valor da venda correspondente a cada um dos vértices do polígono, com exceção da origem (ou implementar o método da paralela à reta de nível zero) (**ver nota 4**) .... (3x1) .... 3 pontos

Apresentar os valores pedidos $(x = 40$ e $y = 60)$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se, em alguma das restrições, for utilizado incorretamente o símbolo «$<$», em vez do símbolo «$\leq$», ou o símbolo «$>$», em vez do símbolo «$\geq$», a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto, no total.

2. Se, na restrição, for utilizado incorretamente apenas o símbolo «=», em vez do símbolo «$\leq$», a pontuação a atribuir a este passo é desvalorizada em 1 ponto.

3. Se, na restrição, for utilizado incorretamente apenas o símbolo «$\geq$», em vez do símbolo «$\leq$», a pontuação a atribuir a este passo é desvalorizada em 2 pontos.

4. No caso de ser implementado o método da paralela à reta de nível zero, se apenas for representada, corretamente, esta reta, a pontuação a atribuir a esta etapa é 2 pontos.

2. .... **15 pontos**

Identificar os valores da variável aleatória X .... (3x1) .... 3 pontos

Reconhecer que $P(X=1{,}6)=\frac{1}{2}$ .... 1 ponto

Obter $P(X=1)$ $\left(\frac{1}{4}\right)$ .... 2 pontos

Obter $P(X=1{,}35)$ $\left(\frac{1}{4}\right)$ .... 2 pontos

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X (**ver nota**) .... 2 pontos

Obter o valor médio da variável aleatória X .... 4 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever uma expressão do valor médio .... 3 pontos

Calcular o valor médio $(1{,}3875)$ .... 1 ponto

2.º Processo

Apresentar as listas introduzidas na calculadora .... 2 pontos

Apresentar o valor médio $(1{,}3875)$ .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $(1{,}39)$ .... 1 ponto

Nota – Se a soma dos valores das probabilidades não for 1, a pontuação máxima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

3. .... **15 pontos**

Identificar $485\ \text{cm}^3$ com $\mu-\sigma$ .... 3 pontos

Identificar $530\ \text{cm}^3$ com $\mu+2\sigma$ .... 3 pontos

Escrever uma expressão que dá a probabilidade .... 7 pontos

Apresentar o valor pedido $(0{,}18)$ .... 2 pontos

GRUPO II

1. .... **15 pontos**

Traduzir o problema pela condição $h(t)=\dfrac{h(0)}{2}$ .... 4 pontos

Determinar $h(0)$ .... 2 pontos

Resolver a condição $h(t)=\dfrac{h(0)}{2}$ .... 8 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Representar graficamente a função h .... 4 pontos

Respeitar o domínio .... 2 pontos

Respeitar a forma do gráfico .... 2 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y=\dfrac{2{,}15+\ln 8{,}9}{2}$ .... 1 ponto

Assinalar o ponto de intersecção da reta com o gráfico de h .... 1 ponto

Obter a abcissa do ponto $(15{,}4545...)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $2{,}15+\ln(8{,}9-0{,}51t)=\dfrac{2{,}15+\ln 8{,}9}{2}$ .... 1 ponto

Obter $8{,}9-0{,}51t=e^{\frac{2{,}15+\ln 8{,}9}{2}-2{,}15}$ .... 4 pontos

Obter o valor de t $(15{,}4545...)$ .... 3 pontos

Apresentar a resposta pedida $(15{,}5 \text{ horas})$ .... 1 ponto

2. .... **15 pontos**

Apresentar as listas introduzidas na calculadora .... 3 pontos

Apresentar os valores de a $(-0{,}032)$, b $(0{,}194)$, c $(-0{,}723)$ e d $(4{,}386)$ ..... 7 pontos

Obter o valor pedido $(0{,}1 \text{ m})$ .... 5 pontos

GRUPO III

1.1. .... **10 pontos**

Identificar o número pedido com $V(0{,}5)$ .... 4 pontos

Obter $V(0{,}5)$ $(910{,}9522...)$ .... 4 pontos

Apresentar o valor pedido (911 euros) .... 2 pontos

1.2. .... **10 pontos**

Traduzir o problema pela condição $V(t) = 374$ .... 1 ponto

Resolver a condição anterior .... 8 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Representar graficamente a função V .... 4 pontos

Respeitar o domínio .... 2 pontos

Respeitar a forma do gráfico .... 2 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = 374$ .... 1 ponto

Assinalar o ponto de intersecção da reta com o gráfico de V .... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto $(5{,}2777...)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $999{,}9 \times 0{,}83^t = 374$ .... 1 ponto

Escrever $t = \log_{0{,}83}\left(\dfrac{374}{999{,}9}\right)$ .... 4 pontos

Obter o valor de t $(5{,}2777...)$ .... 3 pontos

Apresentar a resposta pedida ($5{,}3$ anos) .... 1 ponto

1.3. .... **10 pontos**

Obter $V(3)$ $(571{,}729...)$ .... 2 pontos

Obter $V(0)$ $(999{,}9)$ .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido (-143) .... 1 ponto

Interpretar, no contexto do problema, o valor pedido (por exemplo, «ao longo dos três primeiros anos, a bicicleta do Vicente desvaloriza, em média, 143 euros por ano») .... 5 pontos

2.1. .... **20 pontos**

Calcular o valor de a .... 5 pontos

Identificar 30 com $d(0)$ .... 2 pontos

Escrever $20 + a\cos 0 = 30$ .... 1 ponto

Concluir que $a = 10$ .... 2 pontos

Calcular o valor de b .... 14 pontos

Identificar 20 com $d(0{,}15)$ .... 2 pontos

Escrever $20 + 10\cos(0{,}15b) = 20$ .... 1 ponto

Resolver a equação $20 + 10\cos(0{,}15b) = 20$ .... 11 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Representar graficamente a função definida por $y = 20 + 10\cos(0{,}15x)$ .... 6 pontos

Respeitar o domínio .... 3 pontos

Respeitar a forma do gráfico .... 3 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = 20$ .. 1 ponto

Assinalar o ponto de intersecção da reta com o gráfico da função .... 2 pontos

Obter a abcissa desse ponto $(10{,}4719...)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Obter a equação $\cos(0{,}15b) = 0$ .... 2 pontos

Representar graficamente a função definida por $y = \cos(0{,}15x)$ .... 6 pontos

Respeitar o domínio .... 3 pontos

Respeitar a forma do gráfico .... 3 pontos

Assinalar o ponto do gráfico cuja ordenada é nula .... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto $(10{,}4719...)$ .... 2 pontos

3.º Processo

Obter a equação $\cos(0{,}15b) = 0$ .... 2 pontos

Obter $0{,}15b = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ .... 5 pontos

Obter $b = \frac{\pi}{0{,}3} + k\frac{\pi}{0{,}15},\ k \in \mathbb{Z}$ .... 2 pontos

Obter o valor de b que pertence ao intervalo $[0{,}12]$ $(10{,}4719...)$ .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $(10{,}5)$ .... 1 ponto

2.2. .... **10 pontos**

Interpretar o valor $0{,}3$ (por exemplo, «ao fim de $0{,}3$ segundos, o refletor estava à distância mínima do solo») (**ver nota 1**) .... 5 pontos

Interpretar o valor $0{,}6$ (por exemplo, «ao fim de $0{,}6$ segundos, o refletor estava à distância máxima do solo») (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Notas:

1. Se a interpretação se limitar à indicação de que «para $t = 0{,}3$, a função tem um mínimo», a pontuação a atribuir a esta etapa é 2 pontos.

2. Se a interpretação se limitar à indicação de que «para $t = 0{,}6$, a função tem um máximo», a pontuação a atribuir a esta etapa é 2 pontos.

GRUPO IV

1.1. .... **15 pontos**

Escrever $\frac{4 \times \overline{AB}}{2} = 31$ .... 3 pontos

Obter $\overline{AB}$ .... 2 pontos

Escrever $\operatorname{tg}(20^{\circ}) = \frac{6}{\overline{AD}}$ (ou equivalente) .... 5 pontos

Obter $\overline{AD}$ $(16{,}48486...)$ .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $(0{,}98)$ .... 3 pontos

1.2. .... **10 pontos**

Apresentar as coordenadas do ponto E $\left((-6,-1)\right)$ (**ver nota**) .... 4 pontos

Apresentar as coordenadas do ponto E' $\left((-6,1)\right)$ .... 6 pontos

Nota – Se forem apresentadas apenas as coordenadas do ponto E', esta etapa é considerada como cumprida.

2.1. .... **15 pontos**

Identificar o pedido com a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética .... 3 pontos

Indicar o primeiro termo da progressão (1) .... 1 ponto

Escrever uma expressão que dá o termo de ordem n $\left(1 + 0{,}5(n-1) \text{ ou equivalente}\right)$ .... 4 pontos

Escrever uma expressão que dá a soma dos n primeiros termos da progessão $\left(\frac{1 + (0{,}5n + 0{,}5)}{2} \times n\right)$ .... 3 pontos

Obter $\frac{n^2 + 3n}{4}$ .... 4 pontos

2.2. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Representar graficamente a função definida por $y = \dfrac{x^2+3x}{4}$ .... 4 pontos

Respeitar o domínio .... 1 ponto

Respeitar a forma do gráfico .... 3 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = 100$ .... 1 ponto

Assinalar o ponto de intersecção dessa reta com a curva .... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto $(18{,}5561\ldots)$ .... 2 pontos

Apresentar a resposta («No dia 19 de agosto.») .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever a equação $\dfrac{x^2+3x}{4} = 100$ .... 2 pontos

Obter $x^2 + 3x - 400 = 0$ .... 1 ponto

Obter $x = -21{,}5561\ldots \ \vee \ x = 18{,}5561\ldots$ .... 4 pontos

Referir que, para $x \geq 1$, a função definida por $y = \dfrac{x^2+3x}{4}$ é crescente ...... 1 ponto

Apresentar a resposta («No dia 19 de agosto.») .... 2 pontos

3.º Processo

Calcular $\dfrac{18^2 + 3\times 18}{4}$ $(94{,}5)$ .... 3 pontos

Calcular $\dfrac{19^2 + 3\times 19}{4}$ $(104{,}5)$ .... 3 pontos

Reconhecer que $94{,}5 < 100 < 104{,}5$ .... 1 ponto

Referir que a sucessão definida por $\dfrac{n^2+3n}{4}$ é crescente .... 1 ponto

Apresentar a resposta («No dia 19 de agosto.») .... 2 pontos

COTAÇÕES

Grupo	Item Cotação (em pontos)					
I	1.	2.	3.			
	30	15	15			**60**
II	1.	2.				
	15	15				**30**
III	1.1.	1.2.	1.3.	2.1.	2.2.	
	10	10	10	20	10	**60**
IV	1.1.	1.2.	2.1.	2.2.		
	15	10	15	10		**50**
TOTAL						**200**