REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

**Exame Final Nacional de Matemática B**

**Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2017**

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 10 Páginas

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

---

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, e assinale os pontos relevantes para a resolução (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

---

# Formulário

## Geometria

**Comprimento de um arco de circunferência:**

$\alpha r$ ($\alpha$ – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ ($\alpha$ – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; $r$ – raio)

### Áreas de figuras planas

**Losango:** $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

**Trapézio:** $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

**Polígono regular:** *Semiperímetro* × *Apótema*

**Sector circular:**

$\frac{\alpha r^2}{2}$ ($\alpha$ – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ ($\alpha$ – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; $r$ – raio)

### Áreas de superfícies

**Área lateral de um cone:** $\pi r g$ ($r$ – raio da base; $g$ – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:** $4\pi r^2$ ($r$ – raio)

**Área lateral de um cilindro reto:** $2\pi r g$ ($r$ – raio da base; $g$ – geratriz)

### Volumes

**Pirâmide:** $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

**Cone:** $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

**Esfera:** $\frac{4}{3}\pi r^3$ ($r$ – raio)

**Cilindro:** *Área da base* × *Altura*

## Progressões

Soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão $(u_n)$:

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Probabilidades e Estatística

Se $X$ é uma variável aleatória discreta de valores $x_i$ com probabilidade $p_i$, então:

- **Valor médio** de $X$:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

- **Desvio padrão** de $X$:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se $X$ é uma variável aleatória normal de valor médio $\mu$ e desvio padrão $\sigma$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Página em branco

## GRUPO I

A *CONFETE* é uma confeitaria familiar que fabrica e vende doces.

**1.** Entre os vários tipos de doces fabricados pela *CONFETE*, são especialmente apreciadas as duas variedades de doce de abóbora e noz: a tradicional e a *gourmet*.

Os doces são confecionados em panelas de cobre e, posteriormente, embalados em frascos para venda.

Cada panela de doce tradicional dá um lucro de 8 euros e é fabricado com $0,5\ \mathrm{kg}$ de abóbora, $0,1\ \mathrm{kg}$ de miolo de noz e $0,3\ \mathrm{kg}$ de açúcar.

Cada panela de doce *gourmet* dá um lucro de $10$ euros e é fabricado com $0,6\ \mathrm{kg}$ de abóbora, $0,2\ \mathrm{kg}$ de miolo de noz e $0,1\ \mathrm{kg}$ de açúcar.

Num certo dia, a *CONFETE* dispõe de $20\ \mathrm{kg}$ de abóbora, $6\ \mathrm{kg}$ de miolo de noz e $8,1\ \mathrm{kg}$ de açúcar para fabricar estas duas variedades de doce.

Admita que todo o doce fabricado é vendido.

Determine o número de panelas de doce tradicional e o número de panelas de doce *gourmet* que a confeitaria deve fabricar, de modo a ter o maior lucro possível nesta venda.

Na sua resposta, designe por $x$ o número de panelas de doce tradicional e por $y$ o número de panelas de doce *gourmet* fabricadas, nesse dia, pela *CONFETE*, e percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

– indicar a função objetivo;

– indicar as restrições do problema;

– representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;

– apresentar o valor de $x$ e o valor de $y$ que são a solução do problema.

**2.** Na Figura 1, está representado um esquema da tampa de um frasco de doce vendido na *CONFETE*.

Nesse esquema, estão representados uma circunferência de centro $O$, o quadrado $[PQRS]$ e quatro triângulos isósceles geometricamente iguais. Cada um destes triângulos tem um vértice que pertence à circunferência e tem um lado, diferente dos outros dois, que coincide com um lado do quadrado. Os vértices dos triângulos que pertencem à circunferência são designados pelas letras $A$, $B$, $C$ e $D$

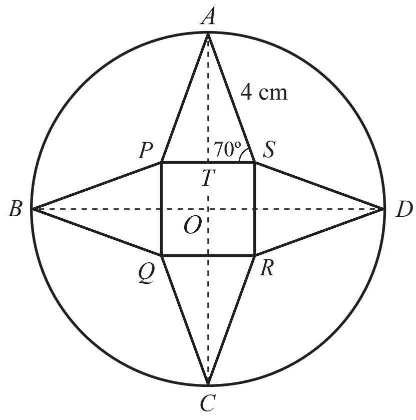

Figura 1

**2.1.** Sabe-se que:

- $\overline{AS} = 4 \text{ cm}$
- $A\hat{S}P = 70^{\circ}$
- o ponto $T$ é o ponto médio do segmento de reta $[PS]$

Determine a área do círculo de centro $O$ e raio $\overline{OD}$

Apresente o resultado em centímetros quadrados, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

**2.2.** Considere a rotação de centro no ponto $O$ e amplitude $630^{\circ}$

Qual é o transformado do ponto $C$ por meio dessa rotação?

**3.** As tampas dos frascos são guardadas em caixas. Uma dessas caixas contém seis tampas, indistinguíveis ao tato, das quais duas são amarelas e quatro são verdes.

Retiram-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas tampas dessa caixa.

Determine a probabilidade de as duas tampas retiradas serem amarelas.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

## GRUPO II

Os pinheiros são, por vezes, atingidos por doenças.

Numa certa região, um pinhal foi afetado por uma doença, tendo-se iniciado o ataque a essa doença com um tratamento adequado que durou quarenta semanas.

Admita que, $t$ semanas após o início do tratamento, a área de pinhal já atingida pela doença, em hectares, é dada, para um certo número real positivo $k$, por

$$f(t) = 0{,}25 + 6\ln(k\,t + 1)\,,\ \text{com}\ \ 0 \leq t \leq 40$$

**1.** Determine o valor de $k$, sabendo que, dez semanas após o início do tratamento, a área de pinhal já atingida era de $4{,}4$ hectares.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

**2.** Seja $g$ a função, de domínio $[0,\,40]$, que dá, em cada instante $t$, a taxa de variação instantânea da função $f$

Considere a seguinte afirmação: «A função $g$ é sempre positiva.»

Interprete esta afirmação no contexto do problema.

## GRUPO III

Num laboratório, procura-se testar as propriedades de condução de calor de três materiais diferentes. Para tal, utilizam-se três barras, A, B e C, compostas dos materiais a analisar.

**1.** Considere que as barras A e B foram aquecidas e, num determinado instante, revestidas de uma película isolante e colocadas a arrefecer.

Admita que, $t$ minutos após esse instante, a temperatura no ponto médio da barra A é dada, em graus Celsius, por

$$A(t) = 18 + 72\,e^{-0{,}02\,t}$$

e a temperatura no ponto médio da barra B é dada, também em graus Celsius, por

$$B(t) = 18 + 50\,e^{-0{,}01\,t}$$

**1.1.** Determine o valor de $A(0) - B(0)$ e interprete esse valor no contexto do problema.

**1.2.** Determine ao fim de quanto tempo, após as duas barras terem sido colocadas a arrefecer, é que a temperatura no ponto médio da barra A é igual à temperatura no ponto médio da barra B.

Apresente o resultado em minutos, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

**2.** Considere agora que, num determinado instante, a barra C, depois de aquecida, foi revestida de uma película isolante e que as suas extremidades foram colocadas em contacto com o gelo. Nesse instante, a barra começou a arrefecer.

Durante alguns minutos, imediatamente a seguir a esse instante, foi registada a temperatura da barra, de dois em dois minutos.

Na tabela seguinte, estão registados alguns instantes, $x$, em minutos, e as correspondentes temperaturas, $y$, em graus Celsius.

| **Tempo, em minutos, decorrido após o início do arrefecimento** $(x)$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Temperatura, em graus Celsius, da barra** $(y)$ | 46,1 | 42,4 | 39,1 | 36,2 | 33,6 | 31,1 |

Considere válido um modelo de regressão exponencial, $y = a\,b^x$, obtido a partir dos dados da tabela.

Estime, com base neste modelo, a temperatura da barra, catorze minutos após o instante em que esta começou a arrefecer.

Na sua resposta, apresente o valor de $a$ e o valor de $b$ arredondados às milésimas.

Apresente o resultado em graus Celsius, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

## GRUPO IV

Num arraial de uma aldeia, encontra-se uma barraca com um jogo de tiro ao alvo.

**1.** O jogo é constituído por dois alvos, A e B, que se deslocam ao longo de duas calhas circulares e concêntricas, de raios iguais a $1$ e a $2$ decímetros, respetivamente.

A Figura 2 ilustra a situação. Considerou-se um referencial ortogonal e monométrico $xOy$ no plano que contém as duas calhas circulares. Neste referencial, a origem é o centro das duas circunferências e a unidade corresponde a $1$ decímetro.

Os dois alvos iniciam o seu movimento no mesmo instante. Seja $d$ a distância entre eles, em decímetros, $t$ segundos após esse instante. As variáveis $d$ e $t$ relacionam-se através da fórmula

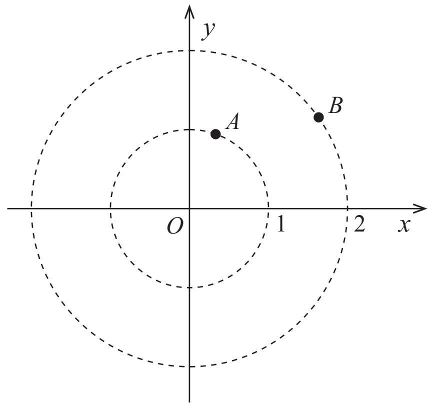


Figura 2

$$d^2 = 5 - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

O argumento da função cosseno está em radianos.

**1.1.** Admita que, no instante $t = 2$ , o alvo A coincide com o ponto de coordenadas $(1, 0)$

Determine, para esse instante, as coordenadas do ponto correspondente à posição ocupada pelo alvo B.

**1.2.** Ao longo dos quatro primeiros segundos, houve dois instantes em que os dois alvos se encontravam à distância de $2$ decímetros um do outro.

Determine quanto tempo decorreu entre esses dois instantes.

Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Para participar no jogo de tiro ao alvo, é necessário adquirir séries de cinco tiros.

A primeira série de cinco tiros custa $2$ euros, a segunda custa menos $10$ cêntimos do que a primeira, a terceira custa menos $10$ cêntimos do que a segunda, e assim sucessivamente. Portanto, cada série de cinco tiros, após a primeira, custa menos $10$ cêntimos do que a anterior.

De acordo com o estipulado pelo dono da barraca, não é permitido adquirir mais do que dez séries de cinco tiros.

**2.1.** Mostre que o preço a pagar pela compra das primeiras $n$ séries de cinco tiros é dado, em euros, por

$$2{,}05n - 0{,}05n^2 \qquad (1 \leq n \leq 10)$$

**2.2.** O Artur pretende gastar exatamente dez euros e cinquenta cêntimos no jogo de tiro ao alvo.

Determine o número de séries de cinco tiros que o Artur vai adquirir.

**2.3.** Determine quanto paga, em média, por cada tiro, um jogador que adquira dez séries de cinco tiros.

Apresente o resultado em cêntimos.

**FIM**

## COTAÇÕES

| Grupo | Item<br>Cotação (em pontos) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | **1.** | **2.1.** | **2.2.** | **3.** | | |
| | 30 | 15 | 10 | 15 | | **70** |
| II | **1.** | **2.** | | | | |
| | 15 | 10 | | | | **25** |
| III | **1.1.** | **1.2.** | **2.** | | | |
| | 10 | 15 | 15 | | | **40** |
| IV | **1.1.** | **1.2.** | **2.1.** | **2.2.** | **2.3.** | |
| | 10 | 15 | 15 | 15 | 10 | **65** |
| **TOTAL** | | | | | | **200** |

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

**Prova 735**

2.ª Fase

**Exame Final Nacional de Matemática B**

**Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2017**

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

**Critérios de Classificação** 10 Páginas

## CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens com cotação igual ou superior a 20 pontos e que envolvam a produção de um texto tem em conta a clareza, a organização dos conteúdos e a utilização do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e aos itens de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

| Situação | Classificação |
|---|---|
| 1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação. | É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado. |
| 2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»]. | A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos. |
| 3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações. | A resposta é classificada com zero pontos. |
| 4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa. | A etapa é pontuada com zero pontos. |

| Situação | Classificação |
|---|---|
| 5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações. | Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista.<br>Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam. |
| 6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item. | Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas.<br>Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte:<br>– nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista;<br>– nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação. |
| 7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa. | Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa.<br>Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista.<br>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota). |
| 8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa. | É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.<br>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota). |
| 9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades na resolução de uma etapa. | A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista.<br>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota). |
| 10. Resolução incompleta de uma etapa. | Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista. |
| 11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto. | É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. |
| 12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros]. | É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final. |
| 13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exato. | É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final. |
| 14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos. | É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.<br>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação. |

| Situação | Classificação |
|---|---|
| 15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado. | É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final. |
| 16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final. | A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista. |
| 17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado. | Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada.<br>Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas. |
| 18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal. | É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto:<br>– se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos;<br>– nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada. |

**Nota** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

### GRUPO I

**1.** ........................................................................................................................ **30 pontos**

Identificar a função objetivo $(L(x, y) = 8x + 10y)$ .............................................. 1 ponto

Indicar as restrições (**ver nota 1**) .............................................................................. 11 pontos

$0{,}5x + 0{,}6y \leq 20$ (ou equivalente) (**ver notas 2** e **3**) ................... 3 pontos

$0{,}1x + 0{,}2y \leq 6$ (ou equivalente) (**ver notas 2** e **3**) ..................... 3 pontos

$0{,}3x + 0{,}1y \leq 8{,}1$ (ou equivalente) (**ver notas 2** e **3**) .................. 3 pontos

$x \geq 0$ .................................................................................................. 1 ponto

$y \geq 0$ .................................................................................................. 1 ponto

Representar graficamente a região admissível ...................................................... 6 pontos

Representar graficamente a reta de equação
$0{,}5x + 0{,}6y = 20$ ............................................................................ 1 ponto

Representar graficamente a reta de equação
$0{,}1x + 0{,}2y = 6$ .............................................................................. 1 ponto

Representar graficamente a reta de equação
$0{,}3x + 0{,}1y = 8{,}1$ ............................................................................ 1 ponto

Assinalar o polígono ........................................................................ 3 pontos

Obter as coordenadas dos vértices do polígono que não pertencem aos eixos coordenados $((10, 25)$ e $(22, 15))$ ..................... (2+2) ...................... 4 pontos

Obter as coordenadas dos vértices do polígono que pertencem aos eixos coordenados, com exceção da origem
$((27, 0)$ e $(0, 30))$ ....................................... (1+1) ............................................ 2 pontos

Calcular o valor do lucro correspondente a cada um dos vértices do polígono, com exceção da origem (ou implementar o método da paralela à reta de nível zero) (**ver nota 4**) ......................... (4x1) .......................... 4 pontos

Apresentar os valores pedidos $(x = 10$ e $y = 25)$ ............................................. 2 pontos

**Notas:**

**1.** Se, em alguma das restrições, for utilizado incorretamente o símbolo «$<$», em vez do símbolo «$\leq$», ou o símbolo «$>$», em vez do símbolo «$\geq$», a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto, no total.

**2.** Se, na restrição, for utilizado incorretamente apenas o símbolo «$=$», em vez do símbolo «$\leq$», a pontuação a atribuir a este passo é desvalorizada em 1 ponto.

**3.** Se, na restrição, for utilizado incorretamente apenas o símbolo «$\geq$», em vez do símbolo «$\leq$», a pontuação a atribuir a este passo é desvalorizada em 2 pontos.

**4.** No caso de ser implementado o método da paralela à reta de nível zero, se apenas for representada, corretamente, esta reta, a pontuação a atribuir a esta etapa é 2 pontos.

**2.1.** ........................................................................................................ **15 pontos**

Obter $\overline{ST}$ e $\overline{AT}$ ........................................................................ 10 pontos

Escrever $\operatorname{sen} 70^{\circ} = \frac{\overline{AT}}{4}$ ........................................................ 3 pontos

Obter $\overline{AT}$ ............................................................................ 2 pontos

Escrever $\cos 70^{\circ} = \frac{\overline{ST}}{4}$ ........................................................ 3 pontos

Obter $\overline{ST}$ ............................................................................ 2 pontos

OU

Escrever $\operatorname{sen} 70^{\circ} = \frac{\overline{AT}}{4}$ ........................................................ 3 pontos

Obter $\overline{AT}$ ............................................................................ 2 pontos

Escrever $\overline{AT}^{2} + \overline{ST}^{2} = 4^{2}$ ........................................................ 3 pontos

Obter $\overline{ST}$ ............................................................................ 2 pontos

OU

Escrever $\cos 70^{\circ} = \frac{\overline{ST}}{4}$ ........................................................ 3 pontos

Obter $\overline{ST}$ ............................................................................ 2 pontos

Escrever $\overline{AT}^{2} + \overline{ST}^{2} = 4^{2}$ ........................................................ 3 pontos

Obter $\overline{AT}$ ............................................................................ 2 pontos

Obter o raio do círculo $(5{,}12685...)$ ................................................ 3 pontos

Obter a área do círculo $(82{,}6 \text{ cm}^2)$ ................................................ 2 pontos

**2.2.** ........................................................................................................ **10 pontos**

| Níveis | Descritores de desempenho | Pontuação |
|---|---|---|
| **2** | Escreve B. | 10 |
| **1** | Escreve D. | 3 |

**3.** ........................................................................................................ **15 pontos**

Indicar o número de casos possíveis $(6 \times 5)$ ........................................ 7 pontos

Indicar o número de casos favoráveis $(2 \times 1)$ ........................................ 7 pontos

Obter o valor pedido $(0{,}07)$ ........................................................ 1 ponto

**Nota –** Se for apresentado um esquema correspondente à determinação dos casos possíveis ou se for apresentada a listagem de todos esses casos, a classificação mínima a atribuir à resposta é 7 pontos.

## GRUPO II

**1.** .......... **15 pontos**

Traduzir o problema pela condição $f(10) = 4{,}4$ .......... 4 pontos

Obter a equação $0{,}25 + 6\ln(10k + 1) = 4{,}4$ .......... 2 pontos

Resolver a equação .......... 8 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Representar graficamente a função definida por
$y = 0{,}25 + 6\ln(10k + 1)$ .......... 4 pontos

Utilizar um intervalo $I \subset \mathbb{R}^+$ relevante para a resolução da equação .......... 2 pontos

Respeitar a forma do gráfico .......... 2 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = 4{,}4$ .......... 1 ponto

Assinalar o ponto de intersecção da reta com o gráfico da função .......... 1 ponto

Obter a abcissa do ponto $(0{,}0997...)$ .......... 2 pontos

**2.º Processo**

Escrever $\ln(10k + 1) = \frac{4{,}15}{6}$ .......... 1 ponto

Obter $10k + 1 = e^{\frac{4{,}15}{6}}$ .......... 4 pontos

Obter o valor de $k$ $(0{,}0997...)$ .......... 3 pontos

Apresentar a resposta pedida $(0{,}1)$ .......... 1 ponto

**2.** .......... **10 pontos**

| Níveis | Descritores de desempenho | Pontuação |
|---|---|---|
| **2** | Responde corretamente (por exemplo, «Durante as quarenta semanas, a área de pinhal já atingida pela doença esteve permanentemente a aumentar»). | 10 |
| **1** | Apresenta uma resposta matematicamente correta, mas sem a interpretar no contexto do problema (por exemplo, «A função $f$ é crescente»). | 5 |

## GRUPO III

**1.1.** .................................................................................................................... **10 pontos**

Obter $A(0)$ .................................................................................... 2 pontos

Obter $B(0)$ .................................................................................... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $(22)$ .................................................................. 1 ponto

Interpretar, no contexto do problema, o valor pedido (por exemplo, «A diferença entre as temperaturas dos pontos médios das barras A e B, no instante inicial, é $22$ ºC».) .................................................................................... 5 pontos

**1.2.** .................................................................................................................... **15 pontos**

Traduzir o problema pela condição $A(t) = B(t)$ ............................................ 2 pontos

Resolver a equação anterior ........................................................................ 12 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Representar graficamente a função $A$ ........................................... 4 pontos

Respeitar o domínio ..................................................... 2 pontos

Respeitar a forma do gráfico ........................................ 2 pontos

Representar graficamente a função $B$ ........................................... 4 pontos

Respeitar o domínio ..................................................... 2 pontos

Respeitar a forma do gráfico ........................................ 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dos dois gráficos ......................... 2 pontos

Obter a abcissa desse ponto $(36{,}46431...)$ .................................. 2 pontos

**2.º Processo**

Escrever $18 + 72\, e^{-0{,}02t} = 18 + 50\, e^{-0{,}01t}$ .................................. 1 ponto

Escrever $0{,}01\, t = \ln\left(\frac{72}{50}\right)$ (ou equivalente) .................................. 8 pontos

Obter o valor de $t$ $(36{,}46431...)$ .................................................. 3 pontos

Apresentar a resposta pedida $(36{,}5$ minutos$)$ .................................................. 1 ponto

**2.** .................................................................................................................... **15 pontos**

Apresentar as listas introduzidas na calculadora .................................................. 3 pontos

Apresentar os valores de $a$ $(49{,}655)$ e de $b$ $(0{,}962)$ ....................................... 7 pontos

Obter o valor pedido $(29$ ºC$)$ .................................................................... 5 pontos

## GRUPO IV

**1.1.** .................................................................................................................. **10 pontos**

Substituir, na fórmula, $t$ por $2$ ........................................................................ 2 pontos

Determinar o valor de $d$ .................................................................................. 3 pontos

Apresentar as coordenadas pedidas $((-2,\ 0))$ .................................................. 5 pontos

**1.2.** .................................................................................................................. **15 pontos**

Escrever a equação $4 = 5 - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ ........................................................ 3 pontos

Resolver a equação ............................................................................................ 9 pontos

Representar graficamente a função $y = 5 - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ .............. 4 pontos

Respeitar o domínio ..................................................... 2 pontos

Respeitar a forma do gráfico ......................................... 2 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = 4$ ...................... 1 ponto

Assinalar os pontos de intersecção da reta com o gráfico da função, no intervalo $[0,\ 4]$ .................................................................. 2 pontos

Obter as abcissas dos pontos $(0{,}8391\ldots$ e $3{,}1608\ldots)$ ................ 2 pontos

Apresentar a resposta pedida $(2{,}3$ segundos) ................................................ 3 pontos

**2.1.** .................................................................................................................. **15 pontos**

Reconhecer o pedido como a soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão aritmética ..................................................................................................... 3 pontos

Indicar o primeiro termo da progressão $(2)$ ........................................................ 1 ponto

Escrever uma expressão que dá o termo de ordem $n$ $\left(2 - 0{,}1(n-1)\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ ........................................................................ 4 pontos

Escrever uma expressão que dá a soma dos $n$ primeiros termos da progressão $\left(\frac{2 + (-0{,}1n + 2{,}1)}{2} \times n\right)$ ........................................................................ 3 pontos

Obter $2{,}05n - 0{,}05n^2$ ........................................................................ 4 pontos

**2.2.** ........................................................................................................................................ **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

**1.º Processo**

Representar graficamente a função definida por $y = 2{,}05x - 0{,}05x^2$ no intervalo $[1, 10]$ ........................................................................................ 8 pontos

Respeitar o domínio ........................................................................ 4 pontos

Respeitar a forma do gráfico .......................................................... 4 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = 10{,}5$ .................................... 1 ponto

Assinalar o ponto de intersecção dessa reta com a curva ................................. 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto $(6)$ ......................................................................... 2 pontos

Apresentar a resposta ($6$ séries) ........................................................................ 3 pontos

**2.º Processo**

Escrever a equação $2{,}05x - 0{,}05x^2 = 10{,}5$ .................................................... 2 pontos

Obter $-0{,}05x^2 + 2{,}05x - 10{,}5 = 0$ .................................................................. 1 ponto

Obter $x = 6 \ \vee \ x = 35$ ............................................................................... 9 pontos

Apresentar a resposta ($6$ séries) ........................................................................ 3 pontos

**3.º Processo**

Apresentar a linha relativa a $x = 6$ da tabela obtida com a calculadora ............ 8 pontos

Justificar que $6$ é o único número de séries de cinco tiros que é solução do problema ................................................................................................................ 4 pontos

Apresentar a resposta ($6$ séries) ........................................................................ 3 pontos

**2.3.** ........................................................................................................................................ **10 pontos**

Obter o preço de dez séries de cinco tiros .......................................................... 3 pontos

Obter o número de tiros ......................................................................................... 4 pontos

Obter o valor pedido ($31$ cêntimos) ..................................................................... 3 pontos

## COTAÇÕES

| Grupo | Item<br>Cotação (em pontos) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | **1.** | **2.1.** | **2.2.** | **3.** | | |
| | 30 | 15 | 10 | 15 | | **70** |
| II | **1.** | **2.** | | | | |
| | 15 | 10 | | | | **25** |
| III | **1.1.** | **1.2.** | **2.** | | | |
| | 10 | 15 | 15 | | | **40** |
| IV | **1.1.** | **1.2.** | **2.1.** | **2.2.** | **2.3.** | |
| | 10 | 15 | 15 | 15 | 10 | **65** |
| **TOTAL** | | | | | | **200** |