REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 1
7 Páginas

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \, \cos b + \operatorname{sen} b \, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \, \cos b - \operatorname{sen} a \, \operatorname{sen} b$

$\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 1.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 1.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

1.1. Na Figura 1, está representado um dado tetraédrico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 4

Lança-se dez vezes esse dado e, em cada lançamento, regista-se o número da face que fica voltada para baixo.

Qual é a probabilidade, arredondada às milésimas, de sair exatamente seis vezes a face com o número 3 ?

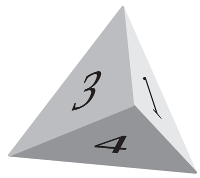

Figura 1

(A) $0{,}146$ **(B)** $0{,}016$ **(C)** $0{,}008$ **(D)** $0{,}007$

PMC2015

1.2. Seja f uma função diferenciável no intervalo $[0,2]$ tal que:

- $f(0)=1$
- $\forall x \in [0,2],\ 0 < f'(x) < 9$

O teorema de Lagrange, aplicado à função f em $[0,2]$, permite concluir que:

(A) $0 < f(2) < 18$

(B) $1 < f(2) < 19$

(C) $2 < f(2) < 20$

(D) $3 < f(2) < 21$

2. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma hexagonal regular.

Sabe-se que:

- $[PQ]$ e $[QR]$ são arestas de uma das bases do prisma;
- $\overline{PQ} = 4$

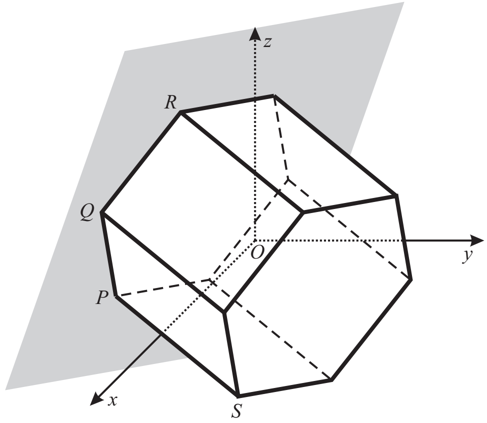

Figura 2

2.1. Determine o produto escalar $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$

2.2. Sabe-se ainda que:

- o plano PQR tem equação $2x + 3y - z - 15 = 0$
- uma das arestas laterais do prisma é o segmento de reta $[PS]$, em que S é o ponto de coordenadas $(14,5,0)$

Determine a área lateral do prisma.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.3. Escolhem-se, ao acaso, dois vértices de cada uma das bases do prisma.

Determine a probabilidade de esses quatro pontos pertencerem a uma mesma face lateral do prisma.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

3. Uma escola dedica-se ao ensino de Espanhol e de Inglês, entre outras línguas.

3.1. Doze alunos dessa escola, quatro de Espanhol e oito de Inglês, dispõem-se lado a lado em linha reta para tirar uma fotografia.

De quantas maneiras se podem dispor os doze alunos, de modo que os alunos da mesma disciplina fiquem juntos?

(A) 40 320 **(B)** 80 640 **(C)** 967 680 **(D)** 1 935 360

3.2. Relativamente a essa escola, sabe-se que:

- o número de alunos que estudam Espanhol é igual ao número de alunos que estudam Inglês;
- o número de alunos que estudam, pelo menos, uma das duas línguas é o quádruplo do número de alunos que estudam as duas línguas.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.

Determine a probabilidade de esse aluno estudar Inglês, sabendo que estuda Espanhol.

Apresente o resultado na forma de percentagem.

4. Um feixe de luz incide perpendicularmente sobre um conjunto de três placas sobrepostas, homogéneas e iguais, feitas de um material transparente. A Figura 3 ilustra a situação.

Admita que a potência, L, da luz transmitida, após atravessar o conjunto de placas, é dada por

$$L = I(1-R)^6 e^{-3\lambda}$$

em que:

- I é a potência da luz incidente;
- R é o coeficiente de reflexão do material $(0 < R < 1)$
- λ é o coeficiente de absorção do material, por centímetro $(\lambda > 0)$

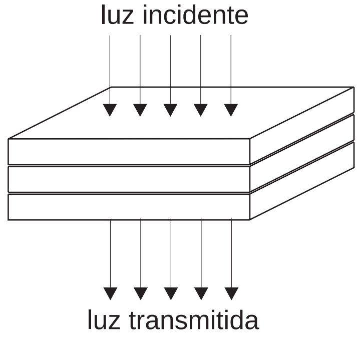

Figura 3

Relativamente ao material de que as placas são feitas, sabe-se que o coeficiente de reflexão, R, e o coeficiente de absorção, λ, têm o mesmo valor numérico.

Sabe-se ainda que a potência da luz transmitida é igual a metade da potência da luz incidente.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor comum dos coeficientes de absorção e de reflexão do material, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– equacione o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;

– apresente o valor pedido arredondado às milésimas.

5. Para um certo número real x, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{12}\right[$, o número complexo $z = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^{10}$ verifica a condição $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{3}\operatorname{Re}(z)$

Qual é o valor de x arredondado às centésimas?

(A) $0{,}02$ **(B)** $0{,}03$ **(C)** $0{,}12$ **(D)** $0{,}13$

6. Seja a um número real.

Sabe-se que a, $a+6$ e $a+18$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Relativamente a essa progressão geométrica, sabe-se ainda que a soma dos sete primeiros termos é igual a 381

Determine o primeiro termo dessa progressão.

7. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro na origem e que passa nos pontos A, B, C, D, E e F

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox e tem abcissa igual a 2
- os pontos B e F têm ambos abcissa igual a 1
- os pontos C, D e E são, respetivamente, os simétricos dos pontos B, A e F relativamente ao eixo Oy

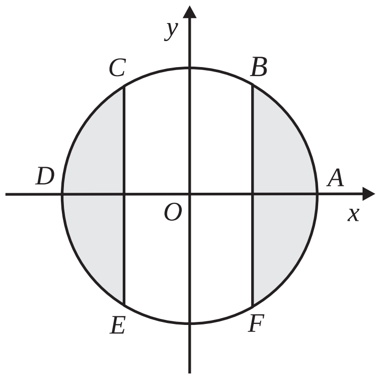

Figura 4

Qual das condições seguintes define o domínio plano representado a sombreado?

(A) $x^2 + y^2 \leq 2 \ \wedge \ |x| \geq 1$

(B) $x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ |x| \leq 1$

(C) $x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ |x| \geq 1$

(D) $x^2 + y^2 \leq 2 \ \wedge \ |x| \leq 1$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	
8		12	12	12	8	13	12	8	12	8	**105**

Prova 635

1.ª Fase

CADERNO 1

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 2

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 6 Páginas

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

8.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 8.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 8.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

8.1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r definida pela condição

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1} \ \wedge \ z=3$$

Qual das seguintes equações vetoriais define a reta r ?

(A) $(x,y,z)=(3,0,3)+k\,(2,-1,0)\ , \quad k\in\mathbb{R}$

(B) $(x,y,z)=(3,0,3)+k\,(2,-1,3)\ , \quad k\in\mathbb{R}$

(C) $(x,y,z)=(-1,2,0)+k\,(2,-1,3)\ , \quad k\in\mathbb{R}$

(D) $(x,y,z)=(-1,2,0)+k\,(2,-1,0)\ , \quad k\in\mathbb{R}$

PMC2015

8.2. Qual é o valor de $\operatorname{arcsen}(1)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$?

(A) $\frac{7\pi}{6}$ **(B)** $\frac{\pi}{6}$ **(C)** $\frac{3\pi}{4}$ **(D)** $\frac{\pi}{4}$

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w=1+\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}\,i^5}{1+2i}$

Sabe-se que w é uma raiz quarta de um certo complexo z

Determine a raiz quarta de z cujo afixo (imagem geométrica) pertence ao primeiro quadrante.

Apresente o resultado na forma trigonométrica, com argumento pertencente ao intervalo $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

10.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 10.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 10.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

10.1. Num saco, encontram-se quatro bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 0 a 3

Retiram-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.

Seja X a variável aleatória «produto dos números saídos».

Para um certo valor de k, tem-se que $P(X = k) = \frac{1}{2}$

Qual é o valor de k ?

(A) 6 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 0

PMC2015

10.2. Seja k um número real.

Considere a sucessão convergente (u_n) definida por $u_n = \left(\frac{n+k}{n}\right)^n$

Sabe-se que o limite de (u_n) é solução da equação $\ln\left(\frac{x}{e}\right) = 3$

Qual é o valor de k ?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** 3 **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** 4

11. Sejam a e b números reais superiores a 1 tais que $\ln b = 4 \ln a$

Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $a^x \geq b^{\frac{1}{x}}$

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

12. Seja g a função, de domínio $]-\infty, \pi]$, definida por

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{4x} & \text{se } x<0 \\ \dfrac{1}{2-\operatorname{sen}(2x)} & \text{se } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

12.1. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função g não tem zeros.

(B) A função g tem um único zero.

(C) A função g tem exatamente dois zeros.

(D) A função g tem exatamente três zeros.

12.2. Averigue se a função g é contínua no ponto 0

Justifique a sua resposta.

12.3. Estude a função g quanto à monotonia no intervalo $]0, \pi]$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

13. Considere a função f definida em $]0, \pi[$ por $f(x)=\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$

Qual das equações seguintes define uma assíntota do gráfico da função f ?

(A) $x=0$ **(B)** $x=\pi$ **(C)** $x=1$ **(D)** $x=\dfrac{\pi}{2}$

14. Na Figura 5, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

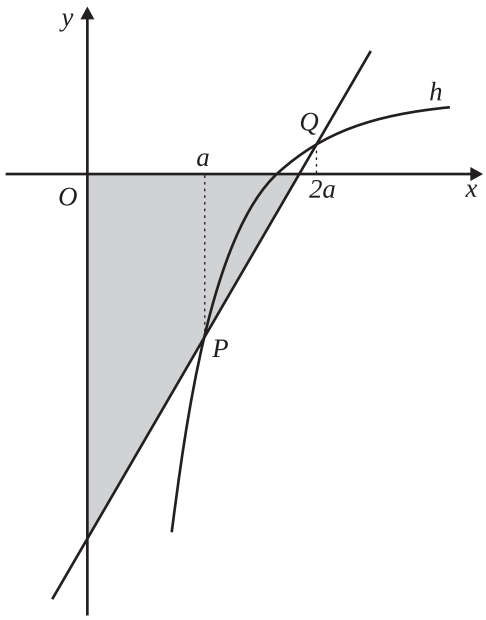

Figura 5

Para cada número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, sejam P e Q os pontos do gráfico da função h de abcissas a e $2a$, respetivamente.

Tal como a figura sugere, a reta PQ define, com os eixos coordenados, um triângulo retângulo.

Mostre que existe, pelo menos, um número real a pertencente ao intervalo $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ para o qual esse triângulo é isósceles.

Sugestão: comece por identificar o valor do declive da reta PQ para o qual o triângulo é isósceles.

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item											
Cotação (em pontos)											
8.1.	**8.2.**	**9.**	**10.1.**	**10.2.**	**11.**	**12.1.**	**12.2.**	**12.3.**	**13.**	**14.**	
8		12	8		13	8	13	13	8	12	**95**

TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)	**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

1.ª Fase

CADERNO 2

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Critérios de Classificação 11 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada», «recorrendo à calculadora gráfica»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Caderno 1

1.1. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

1.2. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

2.1. .... **12 pontos**

Escrever $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = \|\overrightarrow{QP}\| \times \|\overrightarrow{QR}\| \times \cos\left(P\hat{Q}R\right)$ .... 2 pontos

Reconhecer que $P\hat{Q}R = 120°$ .... 4 pontos

Reconhecer que $\|\overrightarrow{QP}\| = \|\overrightarrow{QR}\| = 4$ .... 3 pontos

Obter o valor pedido (-8) .... 3 pontos

2.2. .... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $(x,y,z) = (14,5,0) + k(2,3,-1),\ k \in \mathbb{R}$ .... 2 pontos

Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta PS, em função de k .... 2 pontos

Obter uma equação na variável k, substituindo x, y e z na equação do plano PQR pelas coordenadas de um ponto genérico da reta PS .... 2 pontos

Obter o valor de k .... 2 pontos

Determinar $\overline{PS}$ .... 2 pontos

Obter a área lateral do prisma, com o arredondamento pedido $(179{,}6)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $\dfrac{x-14}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z}{-1}$ .... 2 pontos

Escrever $\begin{cases} \dfrac{x-14}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z}{-1} \\ 2x + 3y - z - 15 = 0 \end{cases}$ .... 2 pontos

Obter as coordenadas do ponto P .... 4 pontos

Determinar $\overline{PS}$ .... 2 pontos

Obter a área lateral do prisma, com o arredondamento pedido $(179{,}6)$ .... 2 pontos

2.3. .... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^6C_2 \times {}^6C_2$ (**ver nota 1**) .... 5 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: 6 (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 3**) $(0{,}03)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^6A_2 \times {}^6A_2$ (**ver nota 1**) .... 5 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: $2 \times 6 \times 2$ (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 3**) $(0{,}03)$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^6C_2 \times {}^6C_2$ (1.º processo de resolução) ou a ${}^6A_2 \times {}^6A_2$ (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se o número de casos favoráveis não for 6 (1.º processo de resolução) ou 24 (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
3. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação de 0 pontos deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0{,}1]$

3.1. .... **8 pontos**

Opção **(D)**

3.2. .... **13 pontos**

Designemos por E o acontecimento «o aluno escolhido estuda Espanhol» e por I o acontecimento «o aluno escolhido estuda Inglês».

Identificar o pedido com $P(I|E)$ .... 2 pontos

Escrever $P(E) = P(I)$ .... 2 pontos

Escrever $P(E \cup I) = 4P(E \cap I)$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter $5P(E \cap I) = 2P(E)$ .... 2 pontos

Escrever $P(I|E) = \dfrac{P(E \cap I)}{P(E)}$ .... 1 ponto

Obter $P(I|E) = \dfrac{2}{5}$ .... 2 pontos

Responder ao problema $(40\,\%)$ .... 1 ponto

4. .... **12 pontos**

Equacionar o problema $\left((1-\lambda)^6 e^{-3\lambda} = \frac{1}{2}\ \text{ou equivalente}\right)$ .... 6 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota**) .... 3 pontos

Apresentar o valor pedido $(0{,}075)$ .... 3 pontos

Nota – Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

5. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

6. .... **12 pontos**

Reconhecer que a razão da progressão é dada, em função de a, por $\frac{a+6}{a}$ $\left(\text{ou por } \frac{a+18}{a+6}\right)$ .... 3 pontos

Escrever $\frac{a+6}{a} = \frac{a+18}{a+6}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter o valor de a .... 2 pontos

Obter o valor da razão da progressão .... 2 pontos

Escrever $381 = u_1 \times \frac{1-2^7}{1-2}$ .... 1 ponto

Determinar o termo pedido (3) .... 2 pontos

Nota – Se for apresentada apenas a condição $381 = u_1 \times \frac{1-\left(\frac{a+6}{a}\right)^7}{1-\frac{a+6}{a}}$ (ou equivalente), a classificação máxima a atribuir à resposta é 4 pontos.

7. .... **8 pontos**

Opção **(C)**

Caderno 2

8.1. .... **8 pontos**

Opção **(A)**

8.2. .... **8 pontos**

Opção **(A)**

9. .... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar i^5 com i .... 1 ponto

Obter $w = 1 - \sqrt{3}\,i$ .... 4 pontos

Determinar $w \times i$ na forma algébrica .... 3 pontos

Determinar o número complexo pedido na forma pedida $\left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6} \text{ ou } 2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$ .... 4 pontos

2.º Processo

Identificar i^5 com i .... 1 ponto

Obter $w = 1 - \sqrt{3}\,i$ .... 4 pontos

Escrever w na forma trigonométrica .... 3 pontos

Determinar o número complexo pedido na forma pedida $\left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6} \text{ ou } 2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$ .... 4 pontos

10.1. .... **8 pontos**

Opção **(D)**

10.2. .... **8 pontos**

Opção **(D)**

11. .... **13 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Obter $b = a^4$ .... 2 pontos

Obter $a^x \geq a^{\frac{4}{x}}$ .... 2 pontos

Concluir que $a^x \geq a^{\frac{4}{x}} \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{x}$ .... 2 pontos

Resolver a condição $x \geq \frac{4}{x}$ (**ver nota**) .... 7 pontos

- Escrever $x \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x} \geq 0$ .... 1 ponto
- Apresentar um quadro de sinais .... 4 pontos
- Concluir que $x \in [-2,0[\cup [2,+\infty[$ .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \ln(a^x) \geq \ln\left(b^{\frac{1}{x}}\right)$ .... 2 pontos

Escrever $\ln(a^x) \geq \ln\left(b^{\frac{1}{x}}\right) \Leftrightarrow x \ln a \geq \frac{1}{x} \ln b$ .... 1 ponto

Escrever $x \ln a \geq \frac{1}{x} \ln b \Leftrightarrow x \ln a \geq \frac{1}{x} \times 4 \ln a$ .... 2 pontos

Escrever $x \ln a \geq \frac{1}{x} \times 4 \ln a \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{x}$ .... 1 ponto

Resolver a condição $x \geq \frac{4}{x}$ (**ver nota**) .... 7 pontos

Escrever $x \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x} \geq 0$ .... 1 ponto

Apresentar um quadro de sinais .... 4 pontos

Concluir que $x \in [-2,0[\cup [2,+\infty[$ .... 2 pontos

Nota – Se, erradamente, for considerada a equivalência $x \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0$, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é 3 pontos.

12.1. .... **8 pontos**

Opção **(A)**

12.2. .... **13 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$ .... 5 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{4x}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{4x} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x}$ .... 2 pontos

Escrever $\frac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x} \underset{y=2x}{=} \frac{1}{2} \lim\limits_{y \to 0^-} \frac{e^y-1}{y}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \frac{1}{2}$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{2 - \operatorname{sen}(2x)}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \frac{1}{2}$ .... 1 ponto

Obter $g(0) = \frac{1}{2}$ .... 2 pontos

Justificar a continuidade da função g no ponto 0 («A função g é contínua no ponto 0, porque existe $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$» **OU** «A função g é contínua no ponto 0, porque $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = g(0)$») .... 4 pontos

12.3. .... **13 pontos**

Determinar $g'(x)$ em $]0,\pi]$ (**ver nota**) .... 3 pontos

Escrever $g'(x)=0$ .... 1 ponto

Obter os zeros de g' em $]0,\pi]$ .... 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal de g' e de monotonia de g em $]0,\pi]$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Determinar $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $g\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ e $g(\pi)$ $\left(1, \frac{1}{3} \text{ e } \frac{1}{2}\right)$ .... (1 + 1 + 1) .... 3 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

13. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

14. .... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar o declive da reta PQ, em função de a $\left(\frac{\ln\frac{2}{a}}{2a^2} \text{ ou equivalente}\right)$. 2 pontos

Escrever $\frac{\ln\frac{2}{a}}{2a^2}=1$ .... 2 pontos

Referir que a função f definida por $f(a)=\frac{\ln\frac{2}{a}}{2a^2}$ é contínua em $\left[\frac{1}{2},1\right]$ .... 1 ponto

Determinar $f\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

Justificar que $f\left(\frac{1}{2}\right)>1$ .... 2 pontos

Determinar $f(1)$ .... 1 ponto

Justificar que $f(1)<1$ .... 2 pontos

Invocar o teorema de Bolzano-Cauchy (ou teorema de Bolzano) para concluir o pretendido .... 1 ponto

2.º Processo

Determinar o declive da reta PQ, em função de a $\left(\frac{\ln\frac{2}{a}}{2a^2} \text{ ou equivalente}\right)$. 2 pontos

Determinar a equação reduzida da reta que passa nos pontos do gráfico de h de abcissas a e $2a$ .... 1 ponto

Determinar a abcissa do ponto de intersecção da reta com o eixo Ox, em função de a .... 1 ponto

Referir que a função g definida por $g(a) = b(a) + c(a)$ é contínua em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, sendo $b(a)$ a ordenada na origem da reta, em função de a, e $c(a)$ a abcissa do ponto de intersecção da reta com o eixo Ox, em função de a .... 1 ponto

Determinar $g\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

Justificar que $g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ .... 2 pontos

Determinar $g(1)$ .... 1 ponto

Justificar que $g(1) > 0$ .... 2 pontos

Invocar o teorema de Bolzano-Cauchy (ou teorema de Bolzano) para concluir o pretendido .... 1 ponto

COTAÇÕES

<table>
<tr><th colspan="12">Item</th></tr>
<tr><td colspan="12">Cotação (em pontos)</td></tr>
<tr><td>1.1.</td><td>1.2.</td><td>2.1.</td><td>2.2.</td><td>2.3.</td><td>3.1.</td><td>3.2.</td><td>4.</td><td>5.</td><td>6.</td><td>7.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">8</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>8</td><td>13</td><td>12</td><td>8</td><td>12</td><td>8</td><td>105</td></tr>
<tr><td>8.1.</td><td>8.2.</td><td>9.</td><td>10.1.</td><td>10.2.</td><td>11.</td><td>12.1.</td><td>12.2.</td><td>12.3.</td><td>13.</td><td>14.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">8</td><td>12</td><td colspan="2">8</td><td>13</td><td>8</td><td>13</td><td>13</td><td>8</td><td>12</td><td>95</td></tr>
<tr><td colspan="11">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>