REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

GRUPO I

Um hotel está a publicitar um programa especial para um fim de semana festivo.

1. Para esse fim de semana, o hotel dispõe de 24 quartos triplos, 30 quartos duplos e 14 quartos individuais.

O hotel disponibiliza dois tipos de pacotes, I e II, que diferem na oferta de quartos duplos, triplos e individuais, para vender a operadores turísticos.

Para se determinar o número de pacotes de cada tipo que o hotel deve vender, de modo a obter o valor máximo de receita, construiu-se o seguinte sistema de restrições:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 24 \\ 4x + 3y \leq 30 \\ 2x + y \leq 14 \end{cases}$$

Neste sistema, x e y representam, respetivamente, o número de pacotes do tipo I e o número de pacotes do tipo II que o hotel pode vender.

1.1. Identifique o número de quartos triplos, o número de quartos duplos e o número de quartos individuais que compõem cada um dos tipos de pacotes.

1.2. O preço de venda de cada pacote do tipo I é 600 euros, e o preço de venda de cada pacote do tipo II é 400 euros.

Determine o número de pacotes de cada tipo que o hotel deve vender, para obter o valor máximo de receita.

Na sua resposta, apresente:

– a função objetivo;

– uma representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições;

– a solução do problema.

2. Numa atividade organizada pela equipa de animação do hotel, um animador coloca cinco bolas indistinguíveis ao tato, quatro azuis e uma verde, num saco opaco, para fazer um sorteio.

O animador retira, ao acaso, duas bolas do saco, uma de cada vez e sem reposição, e regista a cor de cada bola retirada.

Seja X a variável aleatória «número de bolas azuis retiradas».

Determine o valor médio da variável aleatória X .

Na sua resposta, apresente a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X .

3. Admita que a altura, em centímetros, dos funcionários do hotel segue uma distribuição normal de valor médio 160 cm e desvio padrão 10 cm .

Qual é a probabilidade de um funcionário do hotel, escolhido ao acaso, ter entre 170 cm e 180 cm de altura?

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Na sua resposta, utilize valores de probabilidade da distribuição normal constantes do formulário.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

GRUPO II

O hotel localiza-se nos Açores e oferece aos hóspedes atividades na praia. Para planear as atividades, a equipa de animação consulta regularmente as previsões da altura de maré no sítio do Instituto Hidrográfico.

1. Com base em previsões do Instituto Hidrográfico para a altura de maré no porto de Angra do Heroísmo, na ilha Terceira, referentes a um período de cinco dias, obteve-se o seguinte modelo:

$$h(t) = 0{,}993 + 0{,}484 \times \operatorname{sen}(0{,}496t + 2{,}196) \text{ , com } t \in [0, 120]$$

Este modelo dá, aproximadamente, a altura de maré, h , em metros, em função do tempo, t , em horas, decorrido a partir de um certo instante inicial. O argumento da função seno está em radianos.

Determine, de acordo com o modelo apresentado, a diferença dos valores máximo e mínimo da altura de maré no primeiro dia do referido período.

Apresente o resultado, em metros, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

2. Com base em previsões do Instituto Hidrográfico para a altura de maré no porto da Horta, na ilha do Faial, para o dia 27 de julho de 2016, foi construído o gráfico da Figura 1, que não está à escala.

Nesta figura:

- t representa o tempo, em horas, decorrido desde as zero horas do dia 27 de julho de 2016;
- $f(t)$ representa a altura de maré, em metros, no instante t.

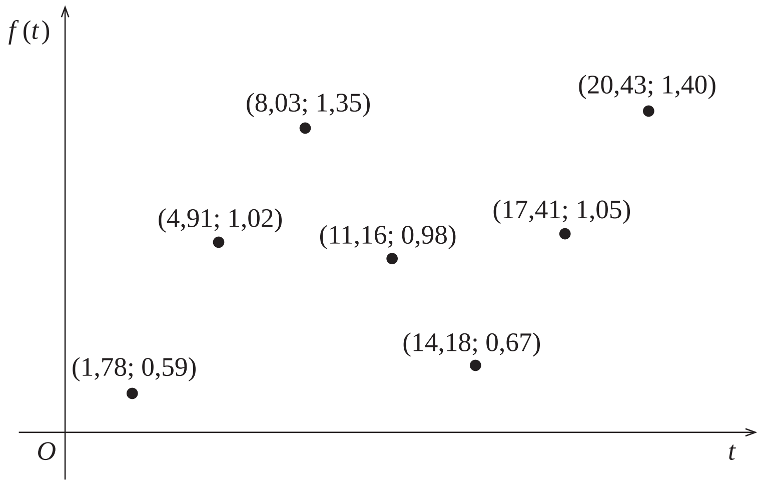

Figura 1

Considere válido um modelo de regressão sinusoidal, $y = a\,\mathrm{sen}(bx + c) + d$, com o argumento da função seno em radianos, obtido a partir das coordenadas dos pontos representados na Figura 1.

Estime, com base nesse modelo, a altura de maré no porto da Horta, às 12 horas do dia 27 de julho de 2016.

Na sua resposta, apresente os valores de a, b, c e d arredondados às centésimas.

Apresente o resultado, em metros, arredondado às centésimas.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

GRUPO III

Vai realizar-se no hotel uma conferência internacional da indústria de telecomunicações móveis. Esta indústria está em constante evolução e, ano após ano, tem aumentado o seu destaque nos mercados mundiais.

1. Um determinado tipo de telemóvel começou a ser comercializado em 2007.

Admita que o número, N, em milhões, de telemóveis daquele tipo vendidos desde o início da sua comercialização até ao instante t pode ser dado, aproximadamente, durante os anos de 2008 a 2015, por

$$N(t) = 1{,}061 \times 1{,}034^{\frac{t}{30}}$$

Neste modelo, t é o tempo, em dias, decorrido desde as zero horas do dia 1 de janeiro de 2008.

1.1. Determine o número de telemóveis daquele tipo vendidos desde o início da sua comercialização até às zero horas do dia 1 de janeiro de 2008.

1.2. De acordo com o modelo apresentado, num determinado ano, o número total de telemóveis daquele tipo vendidos, desde o início da sua comercialização, ultrapassou, pela primeira vez, 2 milhões.

Determine o ano em que tal ocorreu.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

1.3. O mês de fevereiro de 2008 teve 29 dias.

Interprete a expressão $N(60) - N(31) \approx 0{,}04$ no contexto descrito.

2. Uma empresa personaliza capas para telemóveis.

Admita que o número, C, de tipos de capa existentes no catálogo da empresa, no instante t, em meses, pode ser dado, aproximadamente, por

$$C(t) = a \log(bt + 10) \text{ , com } t \in [0, 12] \text{ ,}$$

em que a e b são números reais não nulos e $t = 0$ corresponde ao instante em que a empresa iniciou a sua atividade.

Considere que cada mês tem trinta dias.

2.1. Quando iniciou a sua atividade, a empresa tinha um catálogo com 700 tipos de capa.

Passados dois meses, o número de tipos de capa existentes no catálogo triplicou.

Determine o valor de a e o valor de b.

2.2. Seja T a função que dá a taxa de variação instantânea da função C, para cada valor de t.

Considere a afirmação seguinte.

De acordo com a função C, no instante em que a empresa completou o primeiro trimestre da sua atividade, o número de tipos de capa existentes no catálogo estava a aumentar a uma taxa de 101 unidades por mês, aproximadamente.

A afirmação anterior é uma interpretação da expressão $T(r) \approx s$, em que r e s designam certos números reais.

Identifique o valor de r e o valor de s.

GRUPO IV

No hotel, vai realizar-se um curso de formação sobre Matemática e Arte, com base em obras de Almada Negreiros.

1. Admita que, inicialmente, todos os participantes no curso se cumprimentam com um único aperto de mão.

O número total de apertos de mão depende do número de participantes, como se exemplifica na tabela seguinte.

Número de participantes	**Número total de apertos de mão**
2	1
3	$3 = 1 + 2$
4	$6 = 1 + 2 + 3$
5	$10 = 1 + 2 + 3 + 4$

Assim, caso estejam presentes n participantes, com $n \geq 2$, o número total de apertos de mão dados inicialmente é

$$1 + 2 + \ldots + (n - 1)$$

1.1. Mostre que o número total de apertos de mão dados inicialmente, caso estejam presentes n participantes, é

$$\frac{n^2 - n}{2}$$

1.2. Admita que, inicialmente, foram dados exatamente 2556 apertos de mão.

Determine o número de participantes no curso.

2. A Figura 2 é uma fotografia de parte da obra de Almada Negreiros intitulada *Começar*.

Dois dos elementos geométricos que se encontram em *Começar* são um pentagrama e uma circunferência, representados na Figura 3. Nesta figura:

- os pontos A, B, C, D e E são os vértices do pentagrama pertencentes à circunferência;
- os pontos F, G, H, I e J são os restantes vértices do pentagrama;
- o pentagrama está decomposto no pentágono regular $[FGHIJ]$ e em cinco triângulos isósceles geometricamente iguais;
- o ponto O é o centro da circunferência e do pentágono regular;
- o ponto M é o ponto médio de $[FG]$, sendo $[OM]$ o apótema do pentágono regular e $[MB]$ a altura do triângulo isósceles $[FBG]$ relativa a $[FG]$.

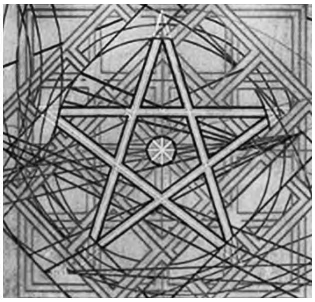

Figura 2

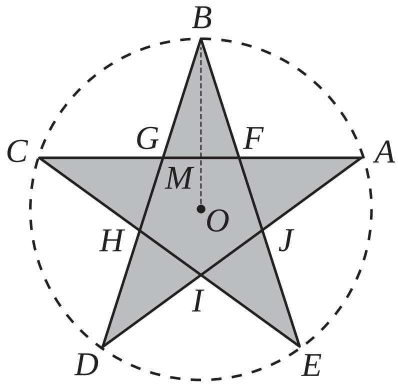

Figura 3

2.1. Identifique o lado extremidade do ângulo orientado com lado origem $\dot{O}A$ e 504^{o} de amplitude.

Justifique a sua resposta.

2.2. Admita que $\overline{OB} = 1 \text{ cm}$ e que $\overline{OM} = 0{,}309 \text{ cm}$.

Determine a área do pentagrama.

Apresente o resultado, em cm^2, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, utilize três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item Cotação (em pontos)					
I	1.1.	1.2.	2.	3.		
	10	20	15	15		60
II	1.	2.				
	15	15				30
III	1.1.	1.2.	1.3.	2.1.	2.2.	
	10	10	10	15	10	55
IV	1.1.	1.2.	2.1.	2.2.		
	15	10	15	15		55
TOTAL						200

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Critérios de Classificação 13 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens com cotação igual ou superior a 20 pontos e que envolvam a produção de um texto tem em conta a clareza, a organização dos conteúdos e a utilização do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e aos itens de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.

Situação	Classificação
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.

Situação	Classificação
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1.1. .... **10 pontos**

Identificar a composição do pacote de tipo I
(2 quartos triplos, 4 quartos duplos e 2 quartos individuais) .... 5 pontos

Identificar a composição do pacote de tipo II
(3 quartos triplos, 3 quartos duplos e 1 quarto individual) .... 5 pontos

1.2. .... **20 pontos**

Apresentar a função objetivo $(L(x, y) = 600x + 400y)$ .... 2 pontos

Representar graficamente a região admissível .... 6 pontos

Representar graficamente a reta de equação $2x + 3y = 24$ ..... 1 ponto

Representar graficamente a reta de equação $4x + 3y = 30$ ..... 1 ponto

Representar graficamente a reta de equação $2x + y = 14$ .... 1 ponto

Assinalar o polígono .... 3 pontos

Obter as coordenadas dos vértices do polígono que pertencem aos
eixos coordenados, com exceção da origem $((7, 0)$ e $(0, 8))$ .... (1+1) .... 2 pontos

Obter as coordenadas dos vértices do polígono que não pertencem
aos eixos coordenados $((3, 6)$ e $(6, 2))$ .... (2+2) .... 4 pontos

Calcular o valor de receita correspondente a cada um dos vértices
do polígono, com exceção da origem (ou implementar o método da
paralela à reta de nível zero) (**ver nota**) .... (1x4) .... 4 pontos

Apresentar os valores pedidos (6 pacotes do tipo I e 2 pacotes do tipo II) ..... 2 pontos

Nota – No caso de ser implementado o método da paralela à reta de nível zero, se apenas for representada, corretamente, essa reta, a pontuação a atribuir a esta etapa é 2 pontos.

2. .... **15 pontos**

Identificar os valores da variável aleatória X $(1$ e $2)$ .... 2 pontos

Obter $P(X=1)$ $\left(\frac{2}{5}\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Obter $P(X=2)$ $\left(\frac{3}{5}\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Obter o valor médio da variável aleatória X .... 4 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever uma expressão do valor médio .... 3 pontos

Calcular o valor médio $(1{,}6)$ .... 1 ponto

2.º Processo

Apresentar as listas introduzidas na calculadora .... 1 ponto

Apresentar o valor médio $(1{,}6)$ .... 3 pontos

Notas:

1. Se for obtido um valor incorreto para $P(X=1)$ (ou para $P(X=2)$), pertencente ao intervalo $]0,1[$, e se, a partir desse valor, for obtido $P(X=2)=1-P(X=1)$ (ou $P(X=1)=1-P(X=2)$), a pontuação a atribuir ao conjunto destas etapas é desvalorizada, no máximo, em 4 pontos.

2. Se a soma dos valores das probabilidades não for 1, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos.

3. .... **15 pontos**

Identificar 170 cm com $\mu+\sigma$ .... 2 pontos

Identificar 180 cm com $\mu+2\sigma$ .... 2 pontos

Obter $P(170<X<180)$ .... 10 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar $P(160<X<170)$ $(0{,}34135)$ .... 3 pontos

Determinar $P(160<X<180)$ $(0{,}47725)$ .... 3 pontos

Calcular $0{,}47725-0{,}34135$ $(0{,}1359)$ .... 4 pontos

2.º Processo

Calcular $0{,}9545-0{,}6827$ $(0{,}2718)$ .... 5 pontos

Calcular metade de $0{,}2718$ $(0{,}1359)$ .... 5 pontos

Apresentar o valor pedido $(0{,}14)$ .... 1 ponto

GRUPO II

1. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Representar graficamente a função h (**ver nota**) .... 6 pontos

Respeitar o domínio .... 3 pontos

Respeitar a forma do gráfico .... 3 pontos

Assinalar um ponto do gráfico relevante para a resolução cuja ordenada seja o valor máximo absoluto da função h .... 1 ponto

Obter esse valor máximo $(1{,}477)$ .... 2 pontos

Assinalar um ponto do gráfico relevante para a resolução cuja ordenada seja o valor mínimo absoluto da função h .... 1 ponto

Obter esse valor mínimo $(0{,}509)$ .... 2 pontos

Calcular a diferença entre os valores extremos $(0{,}968)$ .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido (1 m) .... 1 ponto

Nota – Se for representada uma restrição da função h num intervalo de extremos 0 e a, com $24 \le a < 120$, a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.

2.º Processo

Referir que o argumento da função seno toma valores de um intervalo com amplitude superior a 2π .... 1 ponto

Escrever $-1 \le \operatorname{sen}(0{,}496t + 2{,}196) \le 1$ .... 4 pontos

Escrever $-0{,}484 \le 0{,}484 \times \operatorname{sen}(0{,}496\,t + 2{,}196) \le 0{,}484$ .... 3 pontos

Escrever

$0{,}993 - 0{,}484 \le 0{,}993 + 0{,}484 \times \operatorname{sen}(0{,}496t + 2{,}196) \le 0{,}993 + 0{,}484$ .... 2 pontos

Obter $0{,}509 \le 0{,}993 + 0{,}484 \times \operatorname{sen}(0{,}496t + 2{,}196) \le 1{,}477$ .... 2 pontos

Calcular a diferença entre os valores extremos $(0{,}968)$ .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido (1 m) .... 1 ponto

2. .... **15 pontos**

Apresentar as listas introduzidas na calculadora .... 3 pontos

Apresentar os valores de a $(0{,}37)$, b $(0{,}51)$, c $(-2{,}46)$ e d $(1{,}00)$ (**ver nota**) .... 8 pontos

Identificar as 12 horas do dia 27 de julho de 2016 com $t = 12$ .... 2 pontos

Obter o valor pedido $(0{,}82\text{ m})$ .... 2 pontos

Nota – Se for apresentado 1, em vez de $1{,}00$, a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.

GRUPO III

1.1. .... **10 pontos**

Identificar o número pedido com $N(0)$ .... 4 pontos

Obter $N(0)$ .... 4 pontos

Apresentar o valor pedido $(1{,}061$ milhões, ou equivalente$)$ .... 2 pontos

1.2. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos.

1.º Processo

Obter $N(366)$ $(1{,}5953...)$ (**ver nota 1**) .... 3 pontos

Obter $N(731)$ $(2{,}3962...)$ (**ver nota 2**) .... 3 pontos

Reconhecer que $N(366) < 2 < N(731)$ .... 1 ponto

Referir que a função N é crescente .... 1 ponto

Apresentar a resposta pedida (2009) .... 2 pontos

Notas:

1. Se, em vez de $N(366)$, for obtido $N(365)$, a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.

2. Se, em vez de $N(731)$, for obtido $N(730)$, a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.

2.º Processo

Traduzir o problema pela condição $N(t) > 2$ (**ver nota**) .... 1 ponto

Representar graficamente a função N .... 4 pontos

Respeitar o domínio .... 2 pontos

Respeitar a forma do gráfico .... 2 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = 2$ .... 1 ponto

Assinalar o ponto de intersecção da reta com o gráfico de N .... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto $(568{,}8107...)$ .... 1 ponto

Apresentar a resposta pedida (2009) .... 2 pontos

Nota – Se, em vez da condição $N(t) > 2$, que traduz o problema, for apresentada alguma das condições $N(t) = 2$, $N(t) \geq 2$, $N(t) \leq 2$ ou $N(t) < 2$, e se for apresentada a resposta pedida, a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.

3.º Processo

Escrever $1{,}061 \times 1{,}034^{\frac{t}{30}} > 2$ .... 1 ponto

Escrever $1{,}034^{\frac{t}{30}} > \dfrac{2}{1{,}061}$ .... 1 ponto

Escrever $\dfrac{t}{30} > \log_{1{,}034}\left(\dfrac{2}{1{,}061}\right)$ .... 4 pontos

Obter $t > 568{,}8107...$ .... 2 pontos

Apresentar a resposta pedida (2009) .... 2 pontos

4.º Processo

Escrever $1{,}061 \times 1{,}034^{\frac{t}{30}} = 2$ .... 1 ponto

Escrever $1{,}034^{\frac{t}{30}} = \dfrac{2}{1{,}061}$ .... 1 ponto

Escrever $\dfrac{t}{30} = \log_{1{,}034}\left(\dfrac{2}{1{,}061}\right)$ .... 3 pontos

Obter $t = 568{,}8107...$ .... 2 pontos

Referir que a função N é crescente .... 1 ponto

Apresentar a resposta pedida (2009) .... 2 pontos

1.3. .... **10 pontos**

Identificar $N(60) - N(31)$ com o número de telemóveis vendidos no mês de fevereiro de 2008 (**ver nota**) .... 8 pontos

Identificar $0{,}04$ com o número de milhões de telemóveis vendidos nesse mês (ou equivalente) .... 2 pontos

Nota – Se apenas for identificado $t = 60$ com as zero horas do dia 1 de março de 2008 ou se apenas for identificado $t = 31$ com as zero horas do dia 1 de fevereiro de 2008, a pontuação a atribuir a esta etapa é 2 pontos; se apenas for identificado $t = 60$ com as zero horas do dia 1 de março de 2008 e $t = 31$ com as zero horas do dia 1 de fevereiro de 2008, a pontuação a atribuir a esta etapa é 4 pontos.

2.1. .... **15 pontos**

Calcular o valor de a .... 5 pontos

Identificar 700 com $C(0)$ .... 2 pontos

Escrever $a \log 10 = 700$ .... 1 ponto

Concluir que $a = 700$ .... 2 pontos

Calcular o valor de b .... 10 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Calcular o triplo de 700 .... 1 ponto

Identificar 2100 com $C(2)$ .... 2 pontos

Representar graficamente a função definida por $y = 700 \log(2x + 10)$ (**ver nota**) .... 3 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = 2100$ (**ver nota**) ... 1 ponto

Assinalar o ponto de intersecção dessa reta com a curva .... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto (495) .... 2 pontos

Nota – Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estas etapas é desvalorizada em 1 ponto.

2.º Processo

Calcular o triplo de 700 .... 1 ponto

Identificar 2100 com $C(2)$ .... 2 pontos

Escrever $700 \log(2b + 10) = 2100$ .... 1 ponto

Obter $\log(2b + 10) = 3$ .... 1 ponto

Escrever $2b + 10 = 10^3$ .... 3 pontos

Obter $b = 495$ .... 2 pontos

3.º Processo

Escrever $C(2) = 3 \times C(0)$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Escrever $a \log(2b + 10) = 3 \times a \log 10$ .... 1 ponto

Obter $\log(2b + 10) = 3 \log 10$ .... 1 ponto

Obter $\log(2b + 10) = 3$ .... 1 ponto

Escrever $2b + 10 = 10^3$ .... 3 pontos

Obter $b = 495$ .... 2 pontos

2.2. .... **10 pontos**

Identificar o valor de r (3) .... 5 pontos

Identificar o valor de s (101) .... 5 pontos

GRUPO IV

1.1. .... **15 pontos**

Identificar a expressão $1+2+...+(n-1)$ com a soma de termos consecutivos de uma progressão aritmética .... 3 pontos

Identificar o número de termos $(n-1)$ .... 3 pontos

Identificar o primeiro termo da sequência (1) .... 1 ponto

Identificar o último termo da sequência $(n - 1)$ .... 2 pontos

Escrever a expressão $\frac{1+(n-1)}{2}\times(n-1)$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter $\frac{n^2-n}{2}$ .... 3 pontos

1.2. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Representar graficamente a função definida por $y=\frac{x^2-x}{2}$ no intervalo $[2,+\infty[$ .... 4 pontos

Respeitar o domínio .... 2 pontos

Respeitar a forma do gráfico .... 2 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y=2556$ .... 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dessa reta com a curva .... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido (72) .... 1 ponto

2.º Processo

Escrever a equação $\frac{n^2-n}{2}=2556$ .... 5 pontos

Obter $n^2-n-5112=0$ .... 1 ponto

Obter $n=72$ .... 3 pontos

Apresentar o valor pedido (72) .... 1 ponto

3.º Processo

Apresentar a linha relativa a $n = 72$ da tabela obtida com a calculadora ou escrever $\frac{72^2 - 72}{2} = 2556$ .... 8 pontos

Justificar que 72 é a única solução (por exemplo, referindo que a sucessão definida por $\frac{n^2 - n}{2}$ é crescente) .... 1 ponto

Apresentar o valor pedido (72) .... 1 ponto

2.1. .... **15 pontos**

Obter $A\hat{O}B$ (72°) .... 5 pontos

Relacionar 504° com 72° ou com 144° .... 5 pontos

Identificar o lado extremidade do ângulo $(\dot{O}C)$ (**ver nota**) .... 5 pontos

Nota – Se, em vez de $\dot{O}C$, for indicado $\dot{O}D$, a pontuação a atribuir a esta etapa é 3 pontos.

2.2. .... **15 pontos**

Obter $\overline{MB}$ .... 1 ponto

Identificar um triângulo retângulo em que um dos catetos seja metade do lado do pentágono .... 1 ponto

Calcular a amplitude de um ângulo agudo desse triângulo .... 2 pontos

Calcular $\overline{FM}$ .... 3 pontos

Escrever $\operatorname{tg}(18^{\circ}) = \frac{\overline{FM}}{\overline{MB}}$ ou $\operatorname{tg}(36^{\circ}) = \frac{\overline{FM}}{\overline{OM}}$ (ou equivalente) .. 2 pontos

Obter $\overline{FM}$ .... 1 ponto

Calcular a área de um triângulo isósceles .... 2 pontos

Calcular a área do pentágono .... 2 pontos

Identificar a área do pentagrama com a soma das áreas do pentágono e dos triângulos isósceles .... 2 pontos

Obter o valor pedido $(1,1)$ .... 2 pontos

COTAÇÕES

Grupo	Item Cotação (em pontos)					
I	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.**		
	10	20	15	15		**60**
II	**1.**	**2.**				
	15	15				**30**
III	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**2.1.**	**2.2.**	
	10	10	10	15	10	**55**
IV	**1.1.**	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**		
	15	10	15	15		**55**
TOTAL						**200**