REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 1
6 Páginas

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$

Os vértices A e C têm coordenadas $(2,1,0)$ e $(0,-1,2)$, respetivamente.

O vértice V tem coordenadas $(3,-1,2)$

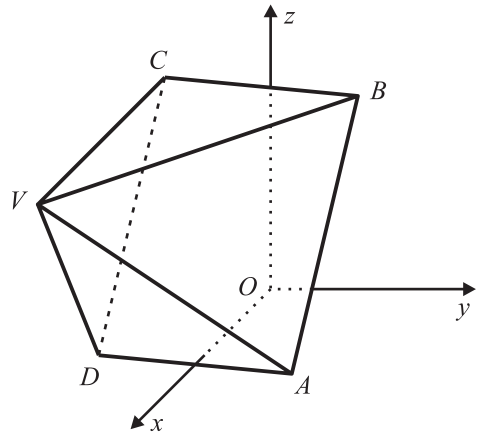

Figura 1

1.1. Determine a amplitude do ângulo VAC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

1.2. Determine uma equação do plano que contém a base da pirâmide.

Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$

2.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 2.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 2.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

2.1. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 5 e desvio padrão $\frac{1}{2}$

Qual é o valor, arredondado às milésimas, de $P(X > 6)$?

(A) $0{,}046$ **(B)** $0{,}042$ **(C)** $0{,}023$ **(D)** $0{,}021$

PMC2015

2.2. Qual é o limite da sucessão de termo geral $\left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n}$?

(A) $\frac{1}{e^3}$ **(B)** e^3 **(C)** $\frac{1}{e^6}$ **(D)** e^6

3. Uma caixa contém bolas de várias cores, indistinguíveis ao tato, umas com um logotipo desenhado e outras não. Das bolas existentes na caixa, dez são amarelas. Dessas dez bolas, três têm o logotipo desenhado.

3.1. Retira-se, ao acaso, uma bola da caixa.

Sabe-se que a probabilidade de ela não ser amarela ou de não ter um logotipo desenhado é igual a $\frac{15}{16}$

Determine o número de bolas que a caixa contém.

3.2. Dispõem-se, ao acaso, as dez bolas amarelas, lado a lado, em linha reta.

Qual é a probabilidade de as três bolas com o logotipo desenhado ficarem juntas?

(A) $\frac{1}{16}$ **(B)** $\frac{1}{15}$ **(C)** $\frac{1}{14}$ **(D)** $\frac{1}{13}$

4. Considere todos os números naturais de sete algarismos que se podem escrever utilizando dois algarismos 5, quatro algarismos 6 e um algarismo 7

Determine quantos destes números são ímpares e maiores do que seis milhões.

5. Uma lente de contacto é um meio transparente limitado por duas faces, sendo cada uma delas parte de uma superfície esférica. Na Figura 2, pode observar-se uma lente de contacto.

Figura 2

Na Figura 3, está representado um corte longitudinal de duas superfícies esféricas, uma de centro C_1 e raio r_1 e outra de centro C_2 e raio r_2, com $r_2 > r_1$, que servem de base à construção de uma lente de contacto, representada a sombreado na figura.

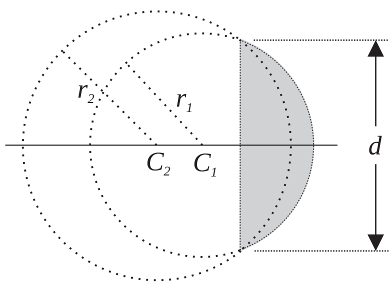

Figura 3

Seja $x = \overline{C_1 C_2}$

Sabe-se que o diâmetro, d, da lente é dado por

$$\frac{\sqrt{\left[(r_1+r_2)^2 - x^2\right]\left[x^2 - (r_1-r_2)^2\right]}}{x}, \quad \text{com} \quad r_2 - r_1 < x < \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$$

Uma lente de contacto foi obtida a partir de duas superfícies esféricas com 7 mm e 8 mm de raio, respetivamente.

O diâmetro dessa lente excede em 9 mm a distância, x, entre os centros das duas superfícies esféricas.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de x, sabendo-se que esse valor é único no intervalo $\left]r_2 - r_1, \sqrt{r_2^2 - r_1^2}\right[$

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido em milímetros, arredondado às décimas.

6. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = -1 + 2i$

Seja θ o menor argumento positivo do número complexo $\bar{z}$ (conjugado de z).

A qual dos intervalos seguintes pertence θ?

(A) $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ **(B)** $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ **(C)** $\left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right[$ **(D)** $\left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$

7. Seja r um número real maior do que 1

Sabe-se que r é a razão de uma progressão geométrica de termos positivos.

Sabe-se ainda que, de dois termos consecutivos dessa progressão, a sua soma é igual a 12 e a diferença entre o maior e o menor é igual a 3

Determine o valor de r

8. Sejam a e b dois números reais positivos tais que $a > b$

Sabe-se que $a + b = 2(a - b)$

Qual é o valor, arredondado às décimas, de $\ln(a^2 - b^2) - 2\ln(a + b)$?

(A) $0{,}7$ **(B)** $1{,}4$ **(C)** $-0{,}7$ **(D)** $-1{,}4$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	
12	12	8		13	8	12	12	8	12	8	**105**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

1.ª Fase

CADERNO 1

REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 2

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

5 Páginas

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

9.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 9.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 9.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

9.1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α, β e γ, definidos pelas equações $x+y+z=1$, $2x+2y+2z=1$ e $x+y=0$, respetivamente.

A intersecção dos planos α, β e γ é

(A) o conjunto vazio. **(B)** um ponto. **(C)** uma reta. **(D)** um plano.

PMC2015

9.2. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, uma elipse e um círculo, ambos centrados na origem do referencial. Os focos da elipse, F_1 e F_2, pertencem ao eixo Ox

Sabe-se que:

- a distância focal e o eixo menor da elipse são iguais ao diâmetro do círculo;
- a área do círculo é igual a 9π

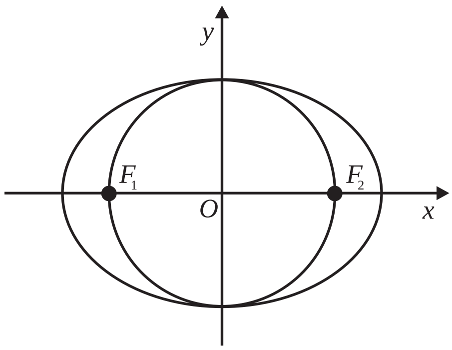

Figura 4

Qual das equações seguintes é a equação reduzida da elipse?

(A) $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$ **(B)** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{9}=1$

(C) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{20}=1$ **(D)** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{18}=1$

10. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $z_1=3+4i$ e $z_2=4+6i$

Seja $w=\frac{z_1+i^6+2\overline{z_1}}{z_1-z_2}$

No plano complexo, a condição $|z|=|w| \wedge \operatorname{Im}(z)\geq 0 \wedge \operatorname{Re}(z)\geq 0$ define uma linha.

Determine o comprimento dessa linha.

11. Qual é a solução da equação $2\cos x + 1 = 0$ no intervalo $[-\pi, 0]$?

(A) $-\frac{5\pi}{6}$ **(B)** $-\frac{2\pi}{3}$ **(C)** $-\frac{\pi}{3}$ **(D)** $-\frac{\pi}{6}$

12.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 12.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 12.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

12.1. Um dado cúbico equilibrado tem uma face numerada com o número -1 e cinco faces numeradas com o número 1

Lança-se este dado duas vezes.

Seja X a variável aleatória «soma dos números saídos nos dois lançamentos».

Qual é o valor de k para o qual $P(X = k) = \frac{5}{18}$?

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** -2 **(D)** -1

PMC2015

12.2. Um ponto P desloca-se numa reta numérica, no intervalo de tempo $I = [0, 10]$ (medido em segundos), de tal forma que a respetiva abcissa é dada por $x(t) = 3\cos\left(\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$, com $t \in I$

Qual é o período, em segundos, deste oscilador harmónico?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 2π **(D)** 3π

13. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se } x<0\\ 0 & \text{se } x=0\\ \dfrac{x}{x-\ln x} & \text{se } x>0\end{cases}$$

13.1. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1

13.2. Averigue se a função f é contínua no ponto 0

Justifique a sua resposta.

14. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $g(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$

14.1. Estude a função g quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

14.2. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x)=g(x)+2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Sabe-se que o gráfico da função h tem uma assíntota oblíqua.

Qual é o declive dessa assíntota?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** e **(D)** e^2

15. Na Figura 5, estão representados, num referencial o.n. xOy, os pontos A e B, de abcissas positivas, e as retas OB e r

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox
- a reta OB é definida pela equação $y=\dfrac{4}{3}x$
- a reta r contém a bissetriz do ângulo AOB

Determine a equação reduzida da reta r

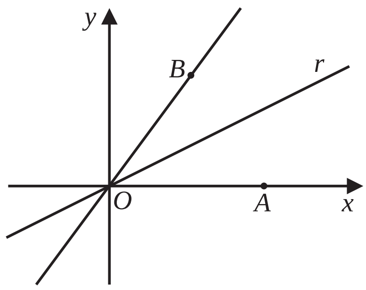

Figura 5

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item											
Cotação (em pontos)											
9.1.	**9.2.**	**10.**	**11.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.1.**	**13.2.**	**14.1.**	**14.2.**	**15.**	
8		13	8	8		13	14	13	8	10	**95**

TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)	**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

1.ª Fase

CADERNO 2

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Critérios de Classificação 11 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Se forem apresentadas respostas a dois itens em alternativa, será classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada», «recorrendo à calculadora gráfica»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Caderno 1

1.1. .... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$ .... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AV}$ .... 1 ponto

Calcular $\overrightarrow{AC} \, . \, \overrightarrow{AV}$ .... 3 pontos

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{AC}$ .... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{AV}$ .... 1 ponto

Escrever a equação $6 = 3 \times \sqrt{12} \times \cos\left(V\hat{A}C\right)$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter a amplitude do ângulo VAC $\left(55^\circ\right)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Determinar $\overline{AC}$ .... 2 pontos

Determinar $\overline{VA}$ (ou determinar $\overline{VC}$) .... 2 pontos

Escrever a equação

$3^2 = \left(\sqrt{12}\right)^2 + 3^2 - 2 \times \sqrt{12} \times 3 \cos\left(V\hat{A}C\right)$ (ou equivalente) .... 6 pontos

Obter a amplitude do ângulo VAC $\left(55^\circ\right)$ .... 2 pontos

1.2. .... **12 pontos**

Designemos por M o ponto médio do segmento de reta $[AC]$

Determinar as coordenadas do ponto M .... 4 pontos

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{MV}$ (ou do vetor $\overrightarrow{VM}$) .... 2 pontos

Escrever $2x - y + z + d = 0$ .... 3 pontos

Obter o valor de d .... 2 pontos

Escrever uma equação do plano pedido

($2x - y + z - 3 = 0$ ou outra equação equivalente, na forma pedida) .... 1 ponto

2.1. .... **8 pontos**

Opção **(C)**

2.2. .... **8 pontos**

Opção **(C)**

3.1. .... **13 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

Designemos por A o acontecimento «a bola retirada é amarela», por L o acontecimento «a bola retirada tem um logotipo desenhado» e por n o número de bolas da caixa.

1.º Processo

Escrever $P(\overline{A} \cup \overline{L}) = \frac{15}{16}$ .... 2 pontos

Escrever $P(\overline{A} \cup \overline{L}) = P(\overline{A \cap L})$ .... 2 pontos

Escrever $P(\overline{A \cap L}) = 1 - P(A \cap L)$ .... 1 ponto

Escrever $P(A \cap L) = \frac{3}{n}$ .... 4 pontos

Escrever $1 - \frac{3}{n} = \frac{15}{16}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter o valor de n (48) .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $P(L \mid A) = \frac{3}{10}$ .... 2 pontos

Escrever $P(\overline{A} \cup \overline{L}) = \frac{15}{16}$ .... 2 pontos

Escrever $P(\overline{A} \cup \overline{L}) = P(\overline{A \cap L})$ .... 2 pontos

Escrever $P(\overline{A \cap L}) = 1 - P(A \cap L)$ .... 1 ponto

Escrever $\frac{P(A \cap L)}{P(A)} = \frac{3}{10}$ .... 1 ponto

Obter $P(A)$ .... 2 pontos

Obter o valor pedido (48) .... 3 pontos

3.º Processo

Escrever $\frac{n-3}{n} = \frac{15}{16}$ (ou equivalente) (**ver nota**) .... 11 pontos

Obter o valor de n (48) .... 2 pontos

Nota – Se a equação apresentada não for $\frac{n-3}{n} = \frac{15}{16}$ (ou equivalente), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

3.2. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

4. .... **12 pontos**

Apresentar a expressão

$\left({}^5C_2 + 5 \times 4 + 5 \text{ ou equivalente}\right)$ (**ver nota 1**) .... 11 pontos

Obter o valor pedido (35) (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Notas:

1. Por cada parcela incorreta ou não apresentada devem ser descontados 4 pontos. Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, esta etapa deve ser pontuada com 0 pontos.

2. Se a etapa anterior tiver sido pontuada com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

5. .... **12 pontos**

Apresentar uma equação que permite resolver o problema

$\left(\dfrac{\sqrt{(225-x^2)(x^2-1)}}{x}=x+9 \quad \text{ou equivalente}\right)$ (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação no intervalo $\left]1,\sqrt{15}\right[$ (**ver nota 2**) .... 4 pontos

Apresentar o valor pedido $(1,4)$ .... 4 pontos

Notas:

1. Se a equação apresentada não traduzir corretamente o problema, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

6. .... **8 pontos**

Opção **(D)**

7. .... **12 pontos**

Nota prévia – Se for considerada uma progressão aritmética, em vez de uma progressão geométrica, a classificação máxima a atribuir à resposta é 4 pontos.

Identificar os termos com a e ar, sendo a o menor dos dois termos .... 2 pontos

Escrever $a+ar=12 \wedge ar-a=3$ (**ver nota**) .... 5 pontos

Obter o valor de r $\left(\dfrac{5}{3}\right)$ .... 5 pontos

Nota – Se for apresentada a condição $a+ar=12 \wedge a-ar=3$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 2 pontos.

8. .... **8 pontos**

Opção **(C)**

Caderno 2

9.1. .... **8 pontos**

Opção **(A)**

9.2. .... **8 pontos**

Opção **(A)**

10. .... **13 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar i^6 com -1 .... 1 ponto

Escrever $\overline{z_1} = 3 - 4i$ .... 1 ponto

Obter $w = \dfrac{8 - 4i}{-1 - 2i}$ .... 2 pontos

Escrever $w = \dfrac{(8 - 4i)(-1 + 2i)}{(-1 - 2i)(-1 + 2i)}$ .... 1 ponto

Obter $w = 4i$ .... 2 pontos

Concluir que $|w| = 4$ .... 1 ponto

Determinar o comprimento da circunferência definida pela condição $|z| = 4$ ... 2 pontos

Obter o comprimento pedido (2π) .... 3 pontos

2.º Processo

Identificar i^6 com -1 .... 1 ponto

Escrever $\overline{z_1} = 3 - 4i$ .... 1 ponto

Obter $w = \dfrac{8 - 4i}{-1 - 2i}$ .... 2 pontos

Obter $|8 - 4i|$ .... 1 ponto

Obter $|-1 - 2i|$ .... 1 ponto

Concluir que $|w| = 4$ .... 2 pontos

Determinar o comprimento da circunferência definida pela condição $|z| = 4$ ... 2 pontos

Obter o comprimento pedido (2π) .... 3 pontos

11. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

12.1. .... **8 pontos**

Opção **(A)**

12.2. .... **8 pontos**

Opção **(A)**

13.1. .... **13 pontos**

Nota prévia – Se for utilizada a expressão $\frac{1-\cos x}{x}$, a classificação máxima a atribuir à resposta é 5 pontos.

Identificar o declive da reta pedida com $f'(1)$ .... 2 pontos

Determinar $f'(1)$ (**ver nota**) .... 6 pontos

Obter uma expressão de $f'(x)$, em $]0,+\infty[$ .... 4 pontos

Obter $f'(1)$ .... 2 pontos

Calcular $f(1)$ .... 2 pontos

Escrever a equação reduzida da reta pedida $(y = x)$ .... 3 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

13.2. .... **14 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ .... 7 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$ .. 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ .... 4 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x-\ln x}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ .... 3 pontos

Referir que $f(0) = 0$ .... 1 ponto

Justificar a continuidade da função no ponto 0 («A função f é contínua no ponto 0, porque existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$» **OU** «A função f é contínua no ponto 0, porque $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$») .... 2 pontos

14.1. .... **13 pontos**

Determinar $g'(x)$ (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Escrever $g'(x)=0$ .... 1 ponto

Obter o zero de g' .... 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal de g' e de monotonia de g (ou equivalente) (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Determinar $g(-1)$ $(-e)$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
2. Se o domínio da função não for respeitado, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é 2 pontos.

14.2. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

15. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, cinco processos.

1.º Processo

Designemos por P um ponto da reta r, de coordenadas (x, y) não nulas.

Indicar as coordenadas de um vetor diretor da reta OA, com primeira coordenada positiva (por exemplo, $\vec{a}\,(1,0)$) .... 1 ponto

Indicar as coordenadas de um vetor diretor da reta OB, de coordenadas positivas (por exemplo, $\vec{b}\,(3,4)$) .... 1 ponto

Escrever $\dfrac{\vec{a}\,.\,\overrightarrow{OP}}{\|\vec{a}\|\times\|\overrightarrow{OP}\|}=\dfrac{\vec{b}\,.\,\overrightarrow{OP}}{\|\vec{b}\|\times\|\overrightarrow{OP}\|}$ .... 1 ponto

Obter $\vec{a}\,.\,\overrightarrow{OP}$, em função de x .... 1 ponto

Obter $\vec{b}\,.\,\overrightarrow{OP}$, em função de x e de y .... 1 ponto

Determinar $\|\vec{a}\|$ .... 1 ponto

Determinar $\|\vec{b}\|$ .... 1 ponto

Escrever $x=\dfrac{3x+4y}{5}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter a equação reduzida da reta r $\left(y=\dfrac{1}{2}x\right)$ .... 1 ponto

2.º Processo

Indicar as coordenadas de um ponto P, não coincidente com a origem, da semireta $\dot{O}B$ .... 1 ponto

Determinar a distância, d, desse ponto à origem do referencial .... 3 pontos

Indicar as coordenadas de um ponto Q da semireta $\dot{O}A$ que se encontre à distância d da origem do referencial .... 3 pontos

Obter a equação reduzida da reta r, mediatriz do segmento de reta $[PQ]$ $\left(y=\frac{1}{2}x\right)$ .... 3 pontos

3.º Processo

Designemos por P um ponto da bissetriz do ângulo AOB de coordenadas (x,y), não nulas, e por I o ponto de intersecção da reta OB com a reta que lhe é perpendicular e que passa no ponto P

Reconhecer que $\overline{OI}=x$ .... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto I, em função de x $\left(\frac{3}{5}x,\frac{4}{5}x\right)$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\overline{PI}=y$ .... 2 pontos

Escrever $\sqrt{\left(x-\frac{3}{5}x\right)^2+\left(y-\frac{4}{5}x\right)^2}=y$ .... 1 ponto

Obter $y=\frac{1}{2}x$ .... 2 pontos

Concluir que a equação reduzida da reta r é $y=\frac{1}{2}x$ .... 1 ponto

4.º Processo

Designemos por θ a inclinação da reta r

Escrever $\operatorname{tg}(2\theta)=\frac{4}{3}$ .... 1 ponto

Obter $\operatorname{tg}\theta$ .... 8 pontos

Escrever a equação reduzida da reta r $\left(y=\frac{1}{2}x\right)$ .... 1 ponto

5.º Processo

Designemos por P um ponto da bissetriz do ângulo AOB de coordenadas (x,y), não nulas.

Determinar as coordenadas do ponto I, ponto de intersecção da reta OB com a reta que lhe é perpendicular e que passa no ponto P, em função de x e de y

$\left(\frac{9x+12y}{25},\frac{12x+16y}{25}\right)$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\overline{PI}=y$ .... 2 pontos

Escrever $\sqrt{\left(x-\dfrac{9x+12y}{25}\right)^2+\left(y-\dfrac{12x+16y}{25}\right)^2}=y$ .... 1 ponto

Obter $y=\dfrac{1}{2}x$ .... 4 pontos

Concluir que a equação reduzida da reta r é $y=\dfrac{1}{2}x$ .... 1 ponto

COTAÇÕES

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	
12	12	8		13	8	12	12	8	12	8	**105**
9.1.	**9.2.**	**10.**	**11.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.1.**	**13.2.**	**14.1.**	**14.2.**	**15.**	
8		13	8	8		13	14	13	8	10	**95**
TOTAL											**200**