REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

Caderno 1
7 Páginas

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$

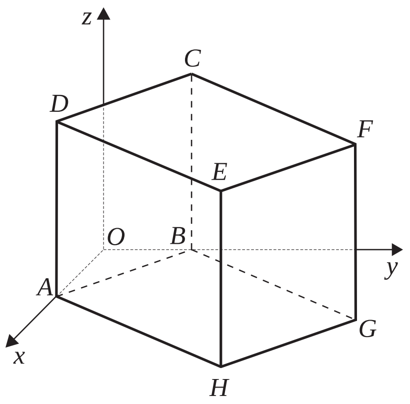

Figura 1

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy
- o vértice C tem coordenadas $(0,3,6)$ e o vértice G tem coordenadas $(6,11,0)$
- o plano ABC é definido pela equação $3x+4y-12=0$

1.1. Determine o volume do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$

1.2. Seja P o ponto de coordenadas $(1,-4,3)$, e seja r a reta que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano ABC

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ABC

1.3. Escolhe-se, ao acaso, um vértice do paralelepípedo e, seguidamente, também ao acaso, escolhe-se um outro vértice, diferente do anterior.

Designe-se por X o primeiro vértice escolhido e por Y o segundo vértice escolhido.

Qual é a probabilidade de a terceira coordenada do vetor $\overrightarrow{XY}$ ser igual a zero?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2. Uma escola secundária tem apenas turmas de 10.º, 11.º e 12.º anos.

2.1. Relativamente aos alunos desta escola, sabe-se que:

- $\frac{3}{5}$ dos alunos do 10.º ano são rapazes;
- $\frac{11}{21}$ dos alunos da escola são rapazes;
- $\frac{1}{7}$ dos alunos da escola são rapazes e frequentam o 10.º ano.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.

Determine a probabilidade de o aluno escolhido ser uma rapariga e não frequentar o 10.º ano.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

2.2. Uma turma dessa escola tem 26 alunos, dos quais 15 são raparigas.

O delegado de turma é um rapaz.

Pretende-se formar uma comissão com três alunos desta turma, para organizar uma festa de fim de ano.

Quantas comissões diferentes, que incluam rapazes e raparigas, se podem formar, sabendo-se que o delegado de turma tem de fazer parte da comissão?

(A) 195 **(B)** 215 **(C)** 235 **(D)** 255

3.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 3.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 3.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

3.1. Uma caixa contém duas bolas brancas e três bolas pretas.

Retiram-se, ao acaso e em simultâneo, duas bolas da caixa.

Seja X a variável aleatória «número de bolas brancas retiradas».

Qual é o valor médio da variável aleatória X ?

(A) $0{,}9$ **(B)** $0{,}8$ **(C)** $0{,}7$ **(D)** $0{,}6$

PMC2015

3.2. De um triângulo, sabe-se que os comprimentos dos seus lados são 4, 5 e 6

Seja α a amplitude do maior ângulo interno desse triângulo.

Qual é o valor de $\operatorname{sen}\alpha$, arredondado às milésimas?

(A) $0{,}989$ **(B)** $0{,}992$ **(C)** $0{,}995$ **(D)** $0{,}998$

4. O nível, N, de um som, medido em decibéis, é função da sua intensidade, I, medida em microwatt por metro quadrado $(\mu\mathrm{W}/\mathrm{m}^2)$, de acordo com a igualdade

$$N = 60 + 10\log_{10} I, \quad \text{com} \quad I > 0$$

Relativamente ao som de um certo despertador, sabe-se que, aumentando a sua intensidade em $150\ \mu\mathrm{W}/\mathrm{m}^2$, o seu nível passa a ser $1{,}4\%$ do quadrado do nível inicial.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor da intensidade inicial do som desse despertador, sabendo-se que pertence ao intervalo $[20{,}80]$ e que, neste intervalo, esse valor é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) obter o valor pedido;
- apresente esse valor em $\mu\mathrm{W}/\mathrm{m}^2$, arredondado às unidades.

5. Para um certo número real k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log_3 k & \text{se} \quad x = 1 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se} \quad x \neq 1 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 8 **(D)** 9

6. Sejam a e b dois números reais diferentes de zero.

Sabe-se que $2,\ a$ e b são três termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Sabe-se ainda que $a-2,\ b$ e 2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Determine a e b

7. Na Figura 2, está representado, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$

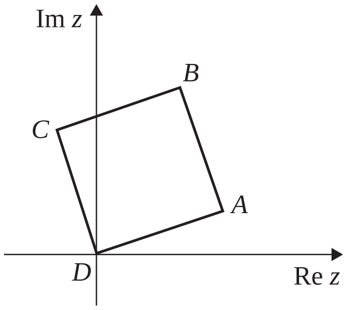

Figura 2

Sabe-se que o ponto A é o afixo (imagem geométrica) de um número complexo z e que o ponto D é o afixo (imagem geométrica) do complexo nulo.

Qual é o número complexo cujo afixo (imagem geométrica) é o ponto B ?

(A) $z(1+i)$ **(B)** iz **(C)** $i^3 z$ **(D)** $z(2+i)$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	
12	12	12	13	8	8		12	8	12	8	**105**

Prova 635

2.ª Fase

CADERNO 1

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 2
6 Páginas

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

8. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 1 - 2i$

Mostre que o afixo (imagem geométrica) do número complexo $w = \dfrac{3z_1 - i\,\overline{z_2}}{1 + i^7}$ pertence à circunferência de centro no afixo (imagem geométrica) de z_1 e raio igual a $\sqrt{53}$

9.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 9.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 9.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

9.1. Na Figura 3, está representada a região admissível de um problema de Programação Linear.

Esta região corresponde ao sistema $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 150 \\ y \leq 300 \\ x + y \leq 400 \end{cases}$

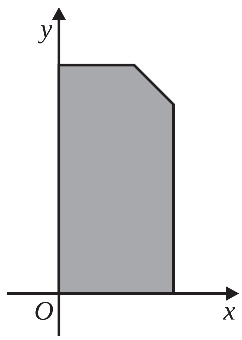

Figura 3

Qual é o valor máximo que a função objetivo, definida por $L = 2x + y$, pode alcançar nesta região?

(A) 450 **(B)** 500 **(C)** 550 **(D)** 600

PMC2015

9.2. Qual é o valor de $\operatorname{sen}\left(3 \arccos \frac{1}{2}\right)$?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(C)** 0 **(D)** 1

10. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n. xOy, a reta AB

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo negativo Ox e o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy
- a reta AB tem equação $y = 2x + 4$

Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$

Quais são as coordenadas do ponto M ?

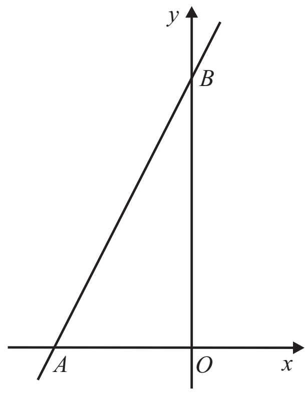

Figura 4

(A) $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ **(B)** $(-1, 2)$

(C) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ **(D)** $(-2, 4)$

11.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 11.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 11.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

11.1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r definida por $\frac{x-1}{2} = \frac{3-y}{4} = z$

Qual dos seguintes vetores pode ser um vetor diretor de uma reta perpendicular à reta r ?

(A) $\vec{a}\,(2, 4, 1)$ **(B)** $\vec{b}\,(-3, 1, 0)$

(C) $\vec{c}\,(1, 1, 2)$ **(D)** $\vec{d}\,(-4, 2, 0)$

PMC2015

11.2. Qual é, para qualquer número real positivo a, o limite da sucessão $\left(\frac{n + \ln a}{n}\right)^{n+2}$?

(A) a^2 **(B)** $2a$ **(C)** a **(D)** $\sqrt{a}$

12. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, definida por $h(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$

12.1. Estude a função h quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as suas equações.

12.2. Resolva, em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, a equação $(x-1)\times h(x)+2e^{-x}=3$

13. Seja g a função definida em $]0,\pi[$ por $g(x)=\dfrac{1}{4}\cos(2x)-\cos x$

13.1. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;

– as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g, caso este(s) exista(m).

13.2. Seja f a função, de domínio $\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$, definida por $f(x)=g(-x)+g\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

Qual das expressões seguintes também pode definir a função f ?

(A) $\operatorname{sen} x+\cos x$

(B) $-\operatorname{sen} x-\cos x$

(C) $\operatorname{sen} x-\cos x$

(D) $-\operatorname{sen} x+\cos x$

14. Na Figura 5, está representado o gráfico da função f, definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = x^2$

Considere que um ponto P, de abcissa positiva, se desloca sobre o gráfico da função f

Para cada posição do ponto P, seja:

- r a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto;
- s a reta perpendicular a r e tangente ao gráfico de f
- Q o ponto de tangência da reta s com o gráfico de f
- I o ponto de intersecção das retas r e s

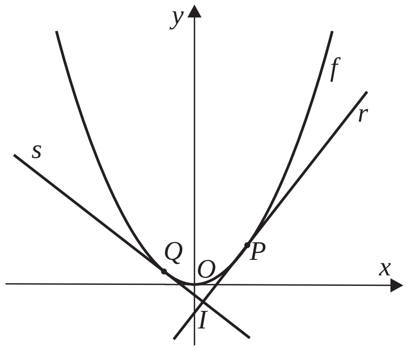

Figura 5

Mostre que, qualquer que seja a abcissa do ponto P, a ordenada do ponto I é sempre igual a $-\frac{1}{4}$

Sugestão: Designe a abcissa do ponto P por a

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item											
Cotação (em pontos)											
8.	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	**11.1.**	**11.2.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.1.**	**13.2.**	**14.**	
13	8		8	8		14	13	13	8	10	**95**

TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)	**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

2.ª Fase

CADERNO 2

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Critérios de Classificação 10 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Se forem apresentadas respostas a dois itens em alternativa, será classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada», «recorrendo à calculadora gráfica»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Caderno 1

1.1. .... **12 pontos**

Determinar as coordenadas do ponto A .... 2 pontos

Identificar as coordenadas do ponto B .... 2 pontos

Determinar $\overline{AB}$ .... 3 pontos

Determinar $\overline{BG}$ .... 3 pontos

Obter o volume do paralelepípedo (300) .... 2 pontos

1.2. .... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $(x,y,z)=(1,-4,3)+k(3,4,0),\ k\in\mathbb{R}$ .... 3 pontos

Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta r, em função de k .... 3 pontos

Obter uma equação na variável k, substituindo x e y na equação do plano ABC pelas coordenadas desse ponto genérico da reta r .... 3 pontos

Obter o valor de k .... 1 ponto

Obter as coordenadas do ponto pedido $\left((4,0,3)\right)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{4}\wedge z=3$ .... 4 pontos

Escrever $\begin{cases}\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{4}\\ z=3\\ 3x+4y-12=0\end{cases}$ .... 4 pontos

Obter as coordenadas do ponto pedido $\left((4,0,3)\right)$ .... 4 pontos

1.3. .... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^{8}A_2$ (**ver nota 1**) .... 5 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: $2\times{}^{4}A_2$ (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 3**) $\left(\dfrac{3}{7}\right)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^{8}C_2$ (**ver nota 1**) .... 5 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: $2 \times {}^{4}C_2$ (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 3**) $\left(\frac{3}{7}\right)$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{8}A_2$ (1.º processo de resolução) ou a ${}^{8}C_2$ (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada for ${}^{4}A_2$ ou equivalente (1.º processo de resolução) ou ${}^{4}C_2$ ou equivalente (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 2 pontos. Caso a expressão apresentada seja incorreta e diferente das expressões referidas, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
3. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação de 0 pontos deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0,1]$

2.1. .... **13 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Designemos por A o acontecimento «o aluno escolhido é rapaz» e por B o acontecimento «o aluno escolhido frequenta o 10.º ano».

Identificar o pedido com $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ .... 2 pontos

Escrever $P(A|B) = \frac{3}{5}$ .... 2 pontos

Escrever $P(A) = \frac{11}{21}$ .... 1 ponto

Escrever $P(A \cap B) = \frac{1}{7}$ .... 2 pontos

Obter $P(B)$ .... 1 ponto

Escrever $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$ .... 2 pontos

Escrever $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$ .... 1 ponto

Responder ao problema $(0{,}38)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Construir uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam «é rapaz, não é rapaz» e «frequenta o 10.º ano, não frequenta o 10.º ano» .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa à informação «$\frac{1}{7}$ dos alunos da escola são rapazes e frequentam o 10.º ano» .... 2 pontos

Preencher a célula da tabela relativa à informação «$\frac{11}{21}$ dos alunos da escola são rapazes» .... 2 pontos

Obter o valor a colocar na célula da tabela relativa à probabilidade de o aluno frequentar o 10.º ano .... 3 pontos

Preencher as restantes células da tabela necessárias à resolução do problema .... 3 pontos

Responder ao problema $(0{,}38)$ .... 2 pontos

2.2. .... **8 pontos**

Opção **(D)**

3.1. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

3.2. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

4. .... **12 pontos**

Apresentar uma equação que permite resolver o problema

$\left(60+10\log_{10}(I+150)=0{,}014(60+10\log_{10}I)^2\right)$ (**ver notas 1** e **2**) .... 4 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 3**) .... 4 pontos

Apresentar o valor pedido (50) .... 4 pontos

Notas:

1. Se a equação apresentada não traduzir corretamente o problema, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a resposta se limitar à apresentação da equação $N(I+150)=0{,}014[N(I)]^2$, a classificação a atribuir à resposta é 2 pontos.
3. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

5. .... **8 pontos**

Opção **(D)**

6. .... **12 pontos**

Escrever $\frac{a}{2}=\frac{b}{a}$ .... 4 pontos

Escrever $b-a+2=2-b$ .... 4 pontos

Escrever $\frac{a}{2}=\frac{b}{a} \wedge b-a+2=2-b$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter o valor de a e o valor de b $\left(a=1 \text{ e } b=\frac{1}{2}\right)$ .... 3 pontos

7. .... **8 pontos**

Opção **(A)**

Caderno 2

8. .... **13 pontos**

Escrever $\overline{z}_2 = 1 + 2i$ .... 2 pontos

Escrever $w = \dfrac{3(2-3i) - i(1+2i)}{1-i}$ .... 2 pontos

Obter $w = \dfrac{8-10i}{1-i}$ .... 2 pontos

Escrever $w = \dfrac{8-10i}{1-i} \times \dfrac{1+i}{1+i}$ .... 1 ponto

Obter $w = 9 - i$ .... 3 pontos

Verificar que $|w - z_1| = \sqrt{53}$ .... 3 pontos

9.1. .... **8 pontos**

Opção **(C)**

9.2. .... **8 pontos**

Opção **(C)**

10. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

11.1. .... **8 pontos**

Opção **(C)**

11.2. .... **8 pontos**

Opção **(C)**

12.1. .... **14 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ .... 7 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{x}{x-1} \right)$ .... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ .... 4 pontos

Determinar $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ .... 2 pontos

Concluir que a reta de equação $y = 0$ é a única assíntota horizontal do gráfico da função h .... 1 ponto

Justificar que apenas a reta de equação $x=1$ pode ser assíntota vertical do gráfico da função h .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)$ ou $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$ .... 2 pontos

Concluir que a reta de equação $x=1$ é assíntota vertical do gráfico da função h .... 1 ponto

12.2. .... **13 pontos**

Escrever $(x-1)\times h(x)+2e^{-x}=3 \Leftrightarrow (x-1)\times \dfrac{e^x}{x-1}+\dfrac{2}{e^x}=3$ .... 2 pontos

Escrever $(x-1)\times \dfrac{e^x}{x-1}+\dfrac{2}{e^x}=3 \Leftrightarrow e^x+\dfrac{2}{e^x}=3$ .... 2 pontos

Escrever $e^x+\dfrac{2}{e^x}=3 \Leftrightarrow e^{2x}-3e^x+2=0$ .... 3 pontos

Escrever $e^{2x}-3e^x+2=0 \Leftrightarrow e^x=2 \vee e^x=1$ .... 4 pontos

Obter as soluções da equação dada $(0$ e $\ln 2)$ .... 2 pontos

13.1. .... **13 pontos**

Determinar $g'(x)$ .... 2 pontos

Determinar $g''(x)$ (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Determinar o zero de g'' .... 3 pontos

- Escrever $g''(x)=0$ .... 1 ponto
- Obter o zero de g'' .... 2 pontos

Apresentar um quadro de sinal de g'' e de sentido da concavidade do gráfico de g (ou equivalente) .... 3 pontos

Referir que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left]0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Referir que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $\left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right[$ (**ver nota 3**) .... 1 ponto

Indicar as coordenadas do ponto de inflexão do gráfico da função g $\left(\left(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{3}{8}\right)\right)$ .... 1 ponto

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a segunda derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2. Se, na resposta, for referido que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$, em vez de em $\left]0, \frac{2\pi}{3}\right]$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

3. Se, na resposta, for referido que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$, em vez de em $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

13.2. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

14. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Seja a a abcissa do ponto P, e seja k a abcissa do ponto Q

Determinar o declive da reta r, em função de a .... 1 ponto

Determinar o declive da reta s, em função de a .... 1 ponto

Escrever $2k = -\frac{1}{2a}$ .... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto Q, em função de a .... 1 ponto

Obter a equação $y = 2ax - a^2$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter a equação $y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Escrever $y = 2ax - a^2 \ \wedge \ y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter $y = -\frac{1}{4}$ .... 2 pontos

2.º Processo

Seja a a abcissa do ponto P

Determinar o declive da reta r, em função de a .... 1 ponto

Obter a equação $y = 2ax - a^2$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Determinar o declive da reta s, em função de a .... 1 ponto

Escrever $y = x^2 \ \wedge \ y = -\frac{1}{2a}x + b$ .... 1 ponto

Obter o valor de b, de modo que a condição anterior tenha uma única solução .... 3 pontos

Escrever $y = 2ax - a^2 \ \wedge \ y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter $y = -\frac{1}{4}$ .... 2 pontos

COTAÇÕES

<table>
<tr><th colspan="12">Item</th></tr>
<tr><td colspan="12">Cotação (em pontos)</td></tr>
<tr><td>1.1.</td><td>1.2.</td><td>1.3.</td><td>2.1.</td><td>2.2.</td><td>3.1.</td><td>3.2.</td><td>4.</td><td>5.</td><td>6.</td><td>7.</td><td></td></tr>
<tr><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>13</td><td>8</td><td colspan="2">8</td><td>12</td><td>8</td><td>12</td><td>8</td><td>105</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>9.1.</td><td>9.2.</td><td>10.</td><td>11.1.</td><td>11.2.</td><td>12.1.</td><td>12.2.</td><td>13.1.</td><td>13.2.</td><td>14.</td><td></td></tr>
<tr><td>13</td><td colspan="2">8</td><td>8</td><td colspan="2">8</td><td>14</td><td>13</td><td>13</td><td>8</td><td>10</td><td>95</td></tr>
<tr><td colspan="11">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>