REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

1. Uma população em ambiente natural, com recursos limitantes, tende a desenvolver-se segundo um modelo logístico.

1.1. Um estudo concluiu que o número de indivíduos da população de focas de uma região dos Estados Unidos seguiu um modelo logístico desde o ano de 1975 até ao ano de 1995.

Na tabela anexa, apresenta-se, relativamente a **alguns** dos **anos** deste período, o número, y, de indivíduos dessa população x anos após o início de 1975.

Anos após o início de 1975 (x)	Número de focas (y)
0	1700
1	1710
2	2008
3	2600
5	3485
6	4500
7	5250
9	5470
10	6080
12	6750
13	6890
14	7000
17	7630
18	7545
20	7485

Considere válido um modelo de regressão logística,

$$y = \frac{c}{1 + a\,e^{-bx}} \text{ , com } a\,,\ b\,,\ c \in \mathbb{R}^+$$

obtido a partir dos dados da tabela.

Estime, com base nesse modelo, o número de focas existentes no início do ano de 1986.

Na sua resposta, apresente:

– os valores de a, b e c arredondados às milésimas;

– o valor pedido arredondado às unidades.

1.2. Admita que, durante uma década, a partir de 1980, numa outra região, o número de indivíduos de outra população de focas também seguiu um modelo logístico.

Seja F a função tal que $F(t)$ é o número de focas dessa população, t anos após as zero horas do dia 1 de janeiro de 1980.

Sabe-se que o valor, arredondado às unidades, da taxa de variação média da função F, no intervalo $[2, 5]$, é 647.

Interprete, no contexto descrito, o significado deste valor.

2. Uma família vive perto de uma cidade do interior e dedica-se à produção de ração para alimentação de aves.

Diariamente, a família costuma levar para o mercado dois tipos de ração: A e B. Para esse fim, dispõe, diariamente, de 70 kg de ração do tipo A e de 50 kg de ração do tipo B.

O transporte de ração é feito numa única viagem, numa carrinha que pode levar até 100 kg de ração.

Sabe-se que a família vende, diariamente, toda a ração que transporta para o mercado.

A ração do tipo A dá o lucro de 1 euro por quilograma, e a ração do tipo B dá o lucro de 2 euros por quilograma.

2.1. Num certo dia, a família vendeu 60 kg de ração do tipo A e alguma ração do tipo B.

Verifique se o lucro obtido pela família, nesse dia, nas condições referidas, pode ter sido 150 euros.

2.2. Determine a quantidade de ração do tipo A e a quantidade de ração do tipo B que a família deve vender, diariamente, para obter o lucro diário máximo nas condições referidas.

Na sua resposta, designe por x a quantidade de ração do tipo A, em kg, vendida diariamente, e designe por y a quantidade de ração do tipo B, em kg, vendida diariamente, e apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

3. No verão passado, o João esteve a observar os pássaros que voavam perto da casa do avô.

Notou que, num voo planado, se um pássaro mantivesse as asas na horizontal, executava uma trajetória linear e horizontal; porém, quando inclinava as asas relativamente à horizontal e mantinha essa inclinação, descrevia um arco de circunferência num plano paralelo à horizontal.

O João investigou a situação e concluiu que o raio, r, em metros, da circunferência correspondente ao arco descrito pelo pássaro está relacionado com a amplitude, θ, em graus, do ângulo de inclinação das asas relativamente à horizontal, de acordo com a relação

$$\text{tg}(\theta) = \frac{6}{r} \quad , \text{ com } 0^\circ < \theta < 90^\circ$$

A situação está representada nos esquemas da Figura 1.

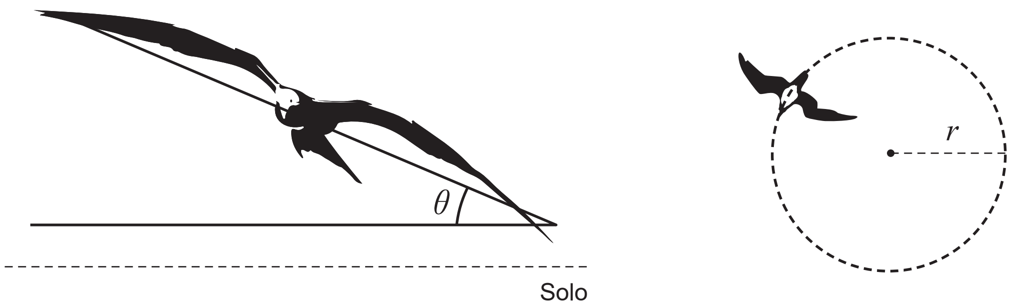

Figura 1

3.1. Admita que um daqueles pássaros descreveu uma circunferência de raio 12 m .

Determine a amplitude, θ , do ângulo de inclinação das asas do pássaro relativamente à horizontal.

Apresente o resultado em graus, arredondado às décimas.

3.2. Um dos pássaros, ao descrever um voo planado, inclinou as asas relativamente à horizontal segundo um ângulo de amplitude $\theta = 45^{\text{o}}$ e descreveu um arco de circunferência de 30^{o} de amplitude.

Na Figura 2, está representado o arco descrito pelo pássaro. Este arco tem centro no ponto O e tem extremos nos pontos A e B .

Determine o comprimento do arco descrito pelo pássaro.

Apresente o resultado, em metros, arredondado às centésimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, três casas decimais.

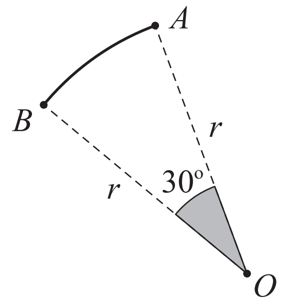

Figura 2

4. Um fio elétrico suspenso de dois postes forma uma curva designada catenária.

Admita que a catenária formada por um fio elétrico suspenso de dois postes, P e Q , distanciados 12 metros entre si, pode ser definida por

$$h(x) = 4(e^{0{,}125x - 0{,}75} + e^{-0{,}125x + 0{,}75})$$

em que $h(x)$ é a distância ao solo, em metros, do ponto do fio situado x metros à direita do poste P , com $x \in [0, 12]$.

A Figura 3, que não está à escala, é um esquema da situação.

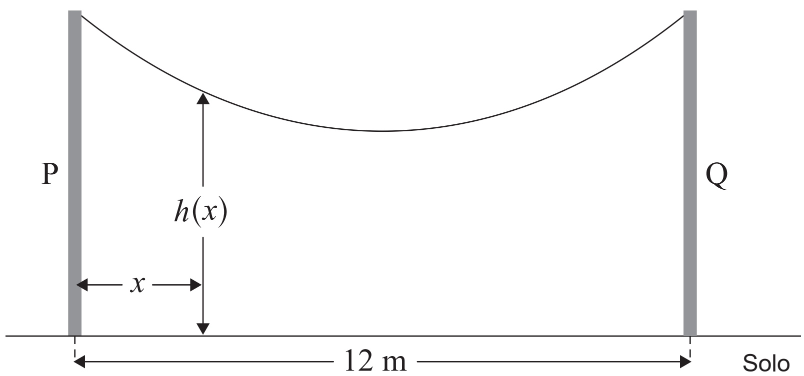

Figura 3

4.1. Verifique se os postes P e Q têm a mesma altura.

4.2. Suponha que um pássaro pousa num ponto do fio, situado mais perto do poste P do que do poste Q , a uma distância de $8{,}7$ metros do solo.

Determine a distância desse ponto do fio ao poste Q .

Apresente o resultado, em metros, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, uma casa decimal.

5. As andorinhas são aves migratórias bem conhecidas no nosso país.

Num dia de primavera, um bando de 121 andorinhas pousou nos fios elétricos de um certo local.

5.1. Admita que, nesse bando:

- a maioria das andorinhas tem mais de dois anos e nenhuma delas tem exatamente dois anos;
- o número de andorinhas com mais de dois anos e o número de andorinhas com menos de dois anos são dois termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{8}$.

Determine o número de andorinhas com mais de dois anos e o número de andorinhas com menos de dois anos desse bando.

5.2. Num dado momento, as andorinhas começaram a levantar voo, sequencialmente, sem que nenhuma voltasse a pousar nos fios.

Sabe-se que foram necessárias algumas vezes até que todas as andorinhas do bando tivessem levantado voo e que o número de andorinhas que levantou voo em cada uma das vezes é dado pela expressão $2n - 1$, em que n representa a ordem de cada uma dessas vezes.

Determine quantas vezes foram necessárias para que todas as andorinhas do bando tivessem levantado voo.

6. Há cinco espécies de andorinhas que podem ser observadas em Portugal, duas das quais em zonas urbanas e as restantes em zonas naturais.

Num jogo educativo, existem cinco cartões diferentes, com as espécies de andorinhas que podem ser observadas em Portugal, como se ilustra na Figura 4.

Figura 4

Retiram-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, dois desses cinco cartões, e regista-se a espécie de andorinha que figura em cada um dos cartões.

Seja X a variável aleatória «número de cartões retirados com espécies que podem ser observadas em zonas urbanas».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X.

7. As andorinhas de cerâmica, desenhadas pelo artista Rafael Bordallo Pinheiro e utilizadas na decoração de paredes, tornaram-se um elemento característico da cultura portuguesa.

A Figura 5 mostra uma composição de seis dessas andorinhas, dispostas de forma que cada uma delas corresponde a um vértice do hexágono regular $[ABCDEF]$, de centro no ponto H, representado na Figura 6.

Figura 5

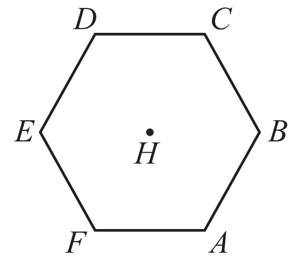

Figura 6

Considere a rotação de centro no ponto C e de amplitude -660^{o}.

Qual é o transformado do ponto H por meio dessa rotação?

Justifique a sua resposta.

8. Há muitos anos que a anilhagem científica contribui para o estudo das aves e das suas migrações. Em Portugal, é o Centro Nacional da Anilhagem que controla essa atividade e que fornece as anilhas metálicas autorizadas para marcar as aves. O diâmetro dessas anilhas depende da espécie a que as aves pertencem, como se ilustra nas Figuras 7 e 8.

Figura 7

Figura 8

A partir de um relatório elaborado por um grupo de anilhadores do país, construiu-se o gráfico de barras da Figura 9, que apresenta as frequências absolutas acumuladas correspondentes ao diâmetro, em milímetros, das anilhas utilizadas em algumas das espécies de aves capturadas por esse grupo, num determinado ano.

Sejam $\overline{x}$ e s, respetivamente, a média e o desvio padrão da amostra representada no gráfico da Figura 9.

Determine a percentagem de anilhas utilizadas cujo diâmetro **não** pertence ao intervalo $]\overline{x}-s, \overline{x}+s[$.

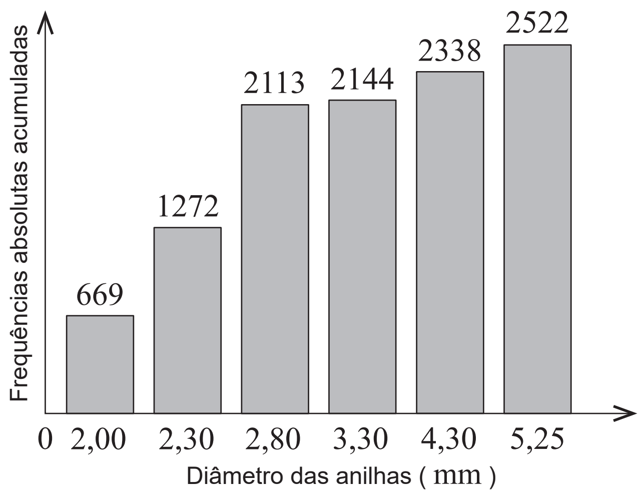

Figura 9

Na sua resposta:

– comece por determinar as frequências absolutas simples;

– apresente o valor de $\overline{x}$ e o valor de s, arredondados às centésimas;

– apresente o resultado arredondado às unidades.

9. A Felícia gosta de observar aves e acompanha frequentemente o pai nas suas funções de anilhador. Um dia, decidiu forrar com papel autocolante a superfície exterior da caixa onde guarda as quatro anilhas que o pai lhe deu como recordação de uma atividade em que participaram.

Sabe-se que:

- cada anilha tem a forma de um cilindro cujas bases têm um diâmetro exterior de $10{,}5\ \text{mm}$ e cuja altura mede $10{,}3\ \text{mm}$, como o esquema da Figura 10 ilustra;
- a caixa também tem a forma de um cilindro e tem exatamente a altura das anilhas;
- as quatro anilhas, dentro da caixa, ficam tangentes entre si e tangentes à superfície lateral interior da caixa, como o esquema da Figura 11 ilustra.

Anilha

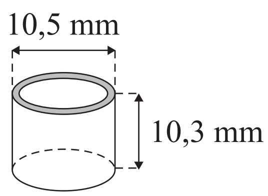

Figura 10

Vista superior da caixa
com as quatro anilhas

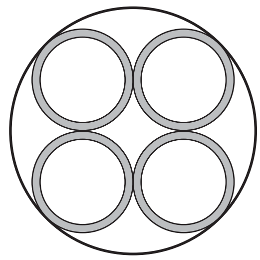

Figura 11

Determine a área total de papel autocolante que a Felícia precisa de utilizar, para forrar exteriormente a superfície lateral e a base da caixa cilíndrica onde guarda as quatro anilhas.

Apresente o resultado, em centímetros quadrados, arredondado às décimas.

Na sua resolução, considere desprezável a espessura da caixa. Poderá ser-lhe útil assinalar, na Figura 11, os centros das circunferências que representam as anilhas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, quatro casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Item														TOTAL
Cotação (em pontos)														
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	
15	10	10	20	10	20	15	15	15	10	10	10	20	20	**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Critérios de Classificação 7 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.

13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. .... **15 pontos**

Identificar as listas introduzidas na calculadora .... 1 ponto

Apresentar os valores de $a\ (4{,}399)$, $b\ (0{,}285)$ e $c\ (7689{,}213)$ .... 7 pontos

Identificar o ano de 1986 com $x = 11$ .... 3 pontos

Obter a estimativa pedida .... 4 pontos

1.2. .... **10 pontos**

Interpretar o intervalo de tempo $[2,\ 5]$ .... 2 pontos

Interpretar o sinal da taxa de variação média de F .... 2 pontos

Interpretar o valor absoluto da taxa de variação média de F .... 4 pontos

Identificar a unidade da taxa de variação média de F .... 2 pontos

Exemplo de resposta:

«Desde o início de 1982 até ao início de 1985, a população de focas cresceu, em média, 647 indivíduos por ano.»

2.1. .... **10 pontos**

Reconhecer que se obtém 60 euros de lucro com a venda de $60\ \mathrm{kg}$ de ração do tipo A .... 2 pontos

Determinar a quantidade de ração do tipo B necessária para obter o lucro de 150 euros $(45\ \mathrm{kg})$ .... 4 pontos

Verificar que não é possível $(60+45>100$ ou equivalente$)$ .... 4 pontos

2.2. .... **20 pontos**

Identificar a função objetivo $\left(L(x,\,y)=x+2y\right)$ .... 1 ponto

Identificar as restrições
$(x\leq 70$, $y\leq 50$, $x+y\leq 100$, $x\geq 0$ e $y\geq 0)$ .... (5×1) .... 5 pontos

Representar graficamente a região admissível .... 4 pontos

Representar graficamente as retas de equações $x=70$ e $y=50$ .... 1 ponto

Representar graficamente a reta de equação $x+y=100$ .... 1 ponto

Assinalar o polígono .... 2 pontos

Obter as coordenadas dos vértices do polígono, exceto a origem
$((70,\,0)$, $(70,\,30)$, $(50,\,50)$ e $(0,\,50))$ .... (4×1) .... 4 pontos

Calcular o lucro correspondente a cada um dos vértices do polígono (ou implementar o método da paralela à reta de nível zero) (**ver nota**) ... (4×1) ... 4 pontos

Apresentar os valores pedidos
$(50\ \mathrm{kg}$ de ração do tipo A e $50\ \mathrm{kg}$ de ração do tipo B$)$ .... 2 pontos

Nota – No caso de ser implementado o método da paralela à reta de nível zero, se apenas for representada, corretamente, esta reta, a pontuação a atribuir a esta etapa é 2 pontos.

Caso não sejam calculados os lucros correspondentes aos vértices de coordenadas $(70,\,0)$ e $(0,\,50)$, mas sejam calculados os lucros correspondentes aos vértices de coordenadas $(70,\,30)$ e $(50,\,50)$, respetivamente, a pontuação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.

3.1. .... **10 pontos**

Escrever $\mathrm{tg}(\theta)=\dfrac{6}{12}$ .... 5 pontos

Obter o valor pedido $(26{,}6^{\mathrm{o}})$ .... 5 pontos

3.2. .... **20 pontos**

Escrever $\mathrm{tg}(45^{\mathrm{o}})=\dfrac{6}{r}$ .... 6 pontos

Obter $\dfrac{6}{r}=1$ .... 3 pontos

Obter $r=6$ .... 3 pontos

Obter o comprimento do arco descrito pelo pássaro .... 8 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever uma expressão do comprimento do arco .... 6 pontos

Obter o valor pedido $(3{,}14 \text{ m})$ .... 2 pontos

2.º Processo

Obter o comprimento da circunferência que contém o arco .... 3 pontos

Relacionar o comprimento dessa circunferência
com o comprimento do arco .... 3 pontos

Obter o valor pedido $(3{,}14 \text{ m})$ .... 2 pontos

4.1. .... **15 pontos**

Identificar a altura do poste P com $h(0)$ .... 3 pontos

Obter $h(0)$ .... 4 pontos

Identificar a altura do poste Q com $h(12)$ .... 3 pontos

Obter $h(12)$ .... 4 pontos

Concluir que os postes têm a mesma altura .... 1 ponto

4.2. .... **15 pontos**

Representar graficamente a função h (**ver nota**) .... 5 pontos

Representar a reta de equação $y = 8{,}7$ (**ver nota**) .... 3 pontos

Assinalar o primeiro ponto de intersecção dos gráficos .... 2 pontos

Obter a abcissa desse ponto $(2{,}67...)$ .... 2 pontos

Calcular a diferença entre 12 e o valor dessa abcissa .... 2 pontos

Apresentar a distância pedida $(9{,}3 \text{ m})$ .... 1 ponto

Nota – Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estas etapas é desvalorizada em 1 ponto.

5.1. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $\frac{x}{y} = \frac{3}{8}$ (ou equivalente), sendo x o número de andorinhas com menos de dois anos e y o número de andorinhas com mais de dois anos .... 4 pontos

Escrever $x + y = 121$ .... 4 pontos

Obter o valor de uma das incógnitas .... 4 pontos

Obter o valor da outra incógnita .... 2 pontos

Apresentar os valores pedidos $(88$ andorinhas com mais de dois anos e 33 andorinhas com menos de dois anos$)$ .... 1 ponto

2.º Processo

Escrever $8+3=11$ .... 4 pontos

Escrever $\frac{121}{11}=11$ .... 4 pontos

Escrever $8\times 11=88$ .... 3 pontos

Escrever $3\times 11=33$ .... 3 pontos

Apresentar os valores pedidos $(88$ andorinhas com mais de dois anos e 33 andorinhas com menos de dois anos$)$ .... 1 ponto

5.2. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar o número de andorinhas que levantaram voo em cada uma das vezes com termos consecutivos de uma progressão aritmética .... 3 pontos

Obter o primeiro termo (1) .... 2 pontos

Escrever $\frac{1+2n-1}{2}\times n=121$ .... 2 pontos

Obter $n^2=121$ .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido (11) .... 1 ponto

2.º Processo

Obter os onze termos da sequência $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21)$ ..... 6 pontos

Calcular a soma desses termos (121) .... 3 pontos

Apresentar o valor pedido (11) .... 1 ponto

6. .... **10 pontos**

Identificar os valores da variável aleatória X $(0$, 1 e $2)$.................................... 3 pontos

Obter $P(X=0)$ $\left(\frac{6}{20}\text{ ou equivalente}\right)$ (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Obter $P(X=1)$ $\left(\frac{12}{20}\text{ ou equivalente}\right)$ (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Obter $P(X=2)$ $\left(\frac{2}{20}\text{ ou equivalente}\right)$ (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Notas:

1. Se for obtido um destes valores usando a probabilidade do acontecimento contrário, ainda que a partir de valores de probabilidade incorretos, a pontuação a atribuir ao conjunto destas etapas é desvalorizada, no máximo, em 4 pontos.
2. Se a soma dos valores das probabilidades não for 1 , a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos.

7. .... **10 pontos**

Reconhecer que metade de um ângulo interno do hexágono mede 60° .... 2 pontos

Reconhecer que o ângulo côncavo com os mesmos lados mede 300° .... 2 pontos

Identificar o sentido da rotação .... 3 pontos

Identificar o ponto B .... 3 pontos

8. .... **20 pontos**

Obter as frequências absolutas $(669\ ,\ 603\ ,\ 841\ ,\ 31,\ 194\ ,\ 184)$ .... 6 pontos

Apresentar as listas introduzidas na calculadora .... 1 ponto

Obter $\overline{x}$ e s $(2{,}77$ e $0{,}92$, respetivamente$)$ .... 4 pontos

Obter os extremos do intervalo $]\,\overline{x}-s\,,\ \overline{x}+s\,[$ $(1{,}85$ e $3{,}69)$ .... 2 pontos

Identificar os diâmetros das anilhas que não pertencem ao intervalo
$]\,\overline{x}-s\,,\ \overline{x}+s\,[$ $(4{,}30$ e $5{,}25)$ .... 2 pontos

Obter o número total de anilhas com esses diâmetros (378) .... 2 pontos

Identificar o número total de anilhas utilizadas (2522) .... 1 ponto

Obter a percentagem pedida (15%) .... 2 pontos

9. .... **20 pontos**

Considerar um triângulo com vértices nos centros de três das anilhas (ou um triângulo com dois lados iguais ao raio das anilhas), representadas na Figura 11 .... 2 pontos

Reconhecer que esse triângulo é um triângulo retângulo .... 2 pontos

Reconhecer que cada cateto mede $10{,}5$ mm (ou $5{,}25$ mm) .... 2 pontos

Aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo .... 1 ponto

Obter a hipotenusa do triângulo .... 2 pontos

Obter o raio da base da caixa .... 3 pontos

Obter a área da base da caixa .... 2 pontos

Obter o perímetro da base da caixa .... 1 ponto

Obter a área lateral da caixa .... 2 pontos

Obter o valor pedido $(13{,}2\ \text{cm}^2)$ .... 3 pontos

COTAÇÕES

Item Cotação (em pontos)														TOTAL
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	
15	10	10	20	10	20	15	15	15	10	10	10	20	20	**200**