

## Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

### Prova 835 | 2.<sup>a</sup> Fase | Ensino Secundário | 2020

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

14 Páginas

A prova inclui 3 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens **1.**, **2.** e **7.1.**). Dos restantes 11 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas relevantes da tabela obtida para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

# Formulário

---

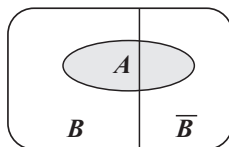
## Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

## Modelos de probabilidade

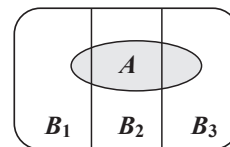
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B}) \end{aligned}$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})}$$



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ &= P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3) \end{aligned}$$

$$P(B_k | A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)}$$

podendo  $k$  tomar os valores 1, 2 ou 3

## Modelo normal

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

## Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável aleatória normal  $X$ , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

$n$  – dimensão da amostra  
 $\bar{x}$  – média amostral  
 $\sigma$  – desvio padrão da variável  
 $z$  – valor relacionado com o nível de confiança (\*)

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável aleatória  $X$ , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$$

$n$  – dimensão da amostra  
 $\bar{x}$  – média amostral  
 $s$  – desvio padrão amostral  
 $z$  – valor relacionado com o nível de confiança (\*)

Intervalo de confiança para uma proporção  $p$ , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$$

$n$  – dimensão da amostra  
 $\hat{p}$  – proporção amostral  
 $z$  – valor relacionado com o nível de confiança (\*)

(\*) Valores de  $z$  para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
$z$	1,645	1,960	2,576

1. A Maria e os amigos estavam a planear o itinerário do *Interrail* que tencionavam fazer nas férias.

Para seleccionar a cidade que visitariam a seguir a Roma, consultaram diversos blogues de viagens. Num deles, o autor apresentava as listas de preferências de 23 pessoas que tinham visitado Itália.

Com estas listas, construíram a tabela seguinte, na qual a lista de preferências de cada uma das 23 pessoas equivale a um voto.

Tabela 1

<b>Votos</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>5</b>	<b>3</b>
<b>Preferências</b>				
<b>1.<sup>a</sup></b>	Veneza	Florença	Milão	Nápoles
<b>2.<sup>a</sup></b>	Florença	Milão	Nápoles	Veneza
<b>3.<sup>a</sup></b>	Nápoles	Veneza	Florença	Milão
<b>4.<sup>a</sup></b>	Milão	Nápoles	Veneza	Florença

A seleção da cidade resultou da aplicação do método a seguir descrito.

- Efetua-se a contagem do número de votos em cada cidade, como primeira preferência, e verifica-se se alguma delas obtém a maioria absoluta. Caso isso se verifique, essa cidade é a vencedora.
- Caso contrário, elimina-se a cidade menos votada como primeira preferência. Em seguida, a tabela de preferências é reestruturada, e, em cada coluna, as cidades que ocupavam os lugares abaixo da cidade eliminada sobem uma linha, mantendo-se pela mesma ordem.
- Os procedimentos anteriores são aplicados à nova tabela de preferências obtida no ponto anterior.
- O processo repete-se até que uma das cidades obtenha a maioria absoluta na primeira preferência.

Indique a cidade que a Maria e os amigos planeiam visitar a seguir a Roma.

Na sua resposta, aplique o método anteriormente descrito, apresentando todos os cálculos efetuados.

2. A Maria, o Carlos, a Elsa, o Pedro e a Sara pretendem visitar França durante o seu *Interrail*. Para prepararem a viagem, decidem pesquisar sobre o país. Como todos querem dar o seu contributo na pesquisa e têm pouco tempo para a realizar, decidem dividir o mapa do país em cinco parcelas, ficando cada um responsável pela recolha de informação sobre uma das parcelas.

Os cinco amigos acordaram entre si que o algoritmo a seguir descrito proporcionaria uma divisão justa do mapa do país.

1.º passo: Atribui-se, aleatoriamente, uma ordem aos amigos. Considere-se que a ordem atribuída foi A, B, C, D e E.

2.º passo: O amigo A delimita uma parcela do mapa que considera corresponder a  $\frac{1}{5}$  do total, visto serem cinco os intervenientes iniciais, e entrega a parcela em causa ao amigo B.

3.º passo: O amigo B pronuncia-se, concordando com a divisão efetuada ou dela discordando:

- se considera que a parcela que lhe foi entregue é  $\frac{1}{5}$  do mapa (ou menos), passa a vez ao amigo seguinte, entregando-lhe a parcela em causa;
- se considera que a parcela que lhe foi entregue é mais do que  $\frac{1}{5}$  do mapa, retifica-a (retirando-lhe uma parte) e passa a vez ao amigo seguinte, entregando-lhe a parcela em causa.

4.º passo: O amigo C repete o procedimento do 3.º passo e entrega a parcela em causa ao amigo D.

5.º passo: O amigo D repete o procedimento do 3.º passo e entrega a parcela em causa ao amigo E.

6.º passo: O amigo E pronuncia-se:

- se concorda com a divisão efetuada, atribui a parcela resultante de todo este processo ao último amigo que tenha retificado a parcela, ou, se ninguém a tiver retificado, entrega-a ao amigo A;
- se discorda da divisão efetuada, retifica a parcela, e esta é-lhe entregue.

Termina assim a primeira volta, saindo o amigo que acabou de receber a parcela.

7.º passo: A segunda volta faz-se com o que resta do mapa e inicia-se no amigo a seguir ao que acabou de receber a parcela na volta anterior, mantendo-se a ordem entre os restantes amigos.

8.º passo: Realizam-se as voltas necessárias, sempre com um amigo a menos do que na volta anterior, até que restem apenas dois amigos. Quando isso acontecer, um divide e o outro escolhe. Termina, assim, a divisão do mapa pelos cinco amigos.

Para a divisão do mapa, a ordem atribuída aleatoriamente foi: Carlos, Maria, Elsa, Pedro e Sara.

Admita que:

- na primeira volta, apenas a Elsa e o Pedro retificaram a parcela do mapa;
- a Elsa não voltou a retificar;
- o Carlos só retificou uma vez, quando a Elsa começou a volta;
- a Elsa começou a 3.ª volta.

Identifique, justificando, os amigos a quem foram atribuídas parcelas do mapa nas primeiras três voltas.

3. A Elsa, que em 2018 fez um *Interrail*, relatou à Maria a sua viagem, explicando-lhe também algumas dificuldades na sua organização.

Uma das dificuldades foi decidir que países visitariam e, em cada país, a quantas cidades iriam.

O grupo de amigos da Elsa acabou por decidir que visitariam a Alemanha, a Áustria, a França, a Itália e a Suíça e que, em cada país, iriam apenas a uma cidade.

Na Tabela 2, apresentam-se as distâncias, em quilómetros, entre as cidades que o grupo considerou mais atrativas e os países a que pertencem.

Tabela 2

		Cidades	Viena	Salzburgo	Paris	Milão	Veneza	Zurique
Países	Alemanha	Munique	430	140	800	500	520	340
	Áustria	Viena		290	1230	860	600	740
		Salzburgo			980	530	460	450
	França	Paris				850	1100	650
	Itália	Milão					270	280
		Veneza						540
	Suíça	Zurique						

Os amigos acordaram que o percurso a realizar seria definido partindo de um grafo no qual duas cidades são interligadas se não pertencerem ao mesmo país, seleccionando-se apenas uma cidade de cada país e atendendo ao seguinte algoritmo:

- escolher a aresta do grafo com menor peso, qualquer que ela seja;
- escolher, sucessivamente, as arestas de menor peso, garantindo que três arestas do percurso que está a ser definido não se encontram num mesmo vértice e não permitindo que se fechem percursos sem que todos os vértices sejam incluídos.

Apresente um percurso possível, definido pelo grupo de amigos da Elsa, com início e fim na cidade de Paris.

Na sua resposta, apresente:

- a ordenação das arestas seleccionadas pelo algoritmo descrito;
- um grafo que resulte da aplicação do algoritmo;
- um percurso que o grupo de amigos da Elsa poderá ter definido.

4. No planeamento de uma viagem, a Maria e quatro amigos pesquisaram, *online*, os diferentes preços para um mesmo alojamento praticados por quatro plataformas de reserva, A, B, C e D.

Depois da pesquisa, seleccionaram dois hotéis, H1 e H2.

Na Figura 1, observa-se parte de um mapa da cidade que vão visitar, no qual estão assinaladas:

- a localização dos hotéis e os preços por noite, para um grupo de cinco pessoas, nas 4 plataformas;
- as zonas de transportes públicos, 1, 2 e 3.

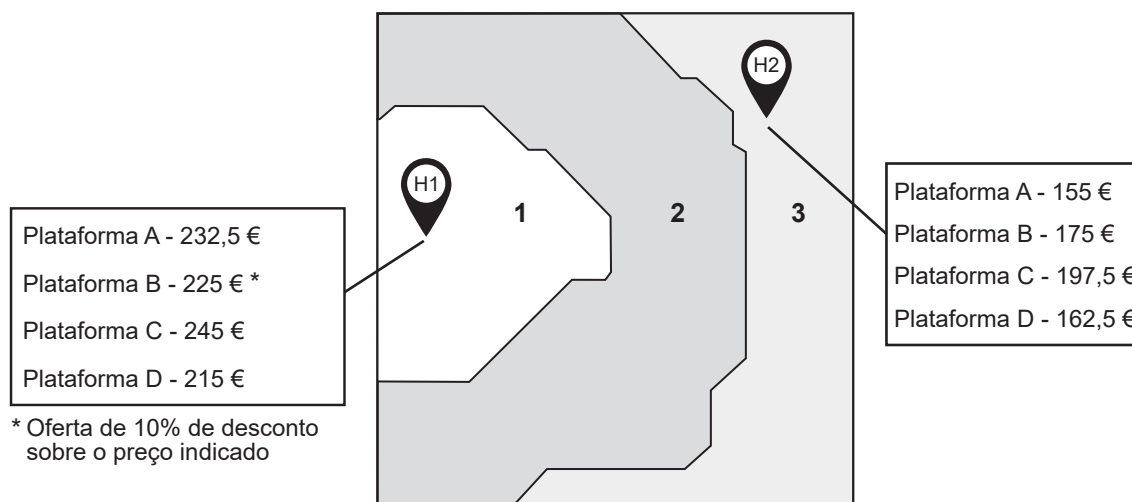


Figura 1

O grupo de amigos pretende visitar o centro da cidade, que se situa na zona 1. Como tal, se os amigos reservarem o hotel H1, podem deslocar-se a pé. Caso reservem o hotel H2, terão de comprar um passe turístico para se deslocarem de transporte público desde a zona do hotel até ao centro da cidade.

Na Tabela 3, indicam-se os preços dos passes turísticos, por pessoa, em função das zonas e dos dias de utilização dos passes.

Tabela 3

N.º de dias	Zonas de 1 a 2	Zonas de 1 a 3
1 dia	10,55 €	22,20 €
2 dias	17,15 €	33,70 €
3 dias	23,40 €	47,25 €

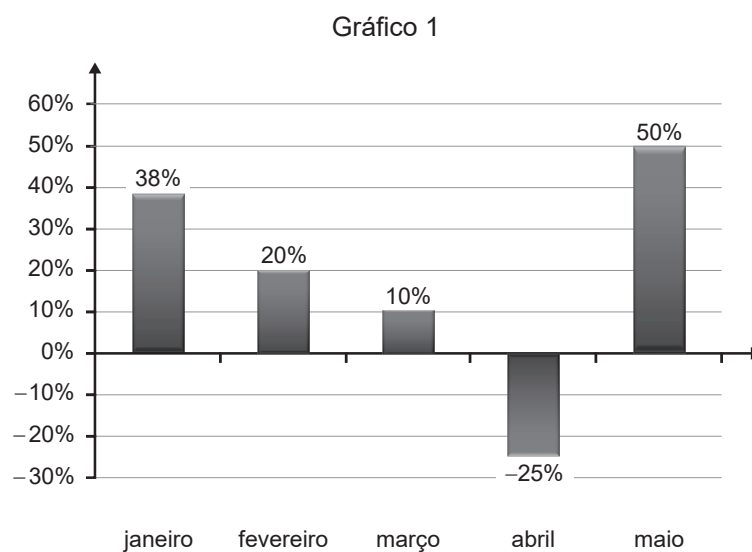
Um dos amigos efetuou cálculos, de modo a encontrar a solução mais económica para permanecerem na cidade duas noites e, se tal fosse o caso, adquirirem um passe turístico para três dias.

Qual é o hotel, H1 ou H2, que o grupo deve seleccionar?

Na sua resposta, apresente o custo total da estadia na cidade, para o grupo dos 5 amigos, caso os amigos fiquem no hotel H1 e caso fiquem no hotel H2.

5. Um hotel divulgou, no final do mês de maio de 2019, a variação do número de quartos ocupados em cada mês, relativamente ao mês anterior.

No Gráfico 1, apresentam-se os dados recolhidos, em percentagem.



No mês de abril, o hotel registou uma ocupação de 198 quartos.

Quantos quartos foram ocupados no mês de março?

- (A) 228                      (B) 264                      (C) 267                      (D) 792



6. Num dos dias do *Interrail*, a Elsa sentiu-se febril. Mediu a temperatura corporal e, como estava com febre, tomou um medicamento e ficou no quarto do hotel.

Admita que a temperatura corporal da Elsa, em graus Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ),  $t$  horas após a toma do medicamento, é bem aproximada pelo modelo seguinte.

$$C(t) = 26 + 13e^{-0,008t} \quad \text{para } t \in [0, 24]$$

Considera-se  $t = 0$  o instante em que a Elsa tomou o medicamento.

- 6.1. Admita que a Elsa tomou o medicamento às 9 horas.

Se às 14 horas e 30 minutos a temperatura corporal da Elsa não tivesse diminuído, pelo menos,  $0,5^{\circ}\text{C}$ , seria necessário recorrer a outro medicamento.

Indique, justificando, se terá sido necessário recorrer a outro medicamento.

Na sua resposta, apresente todos os cálculos que efetuar.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

- 6.2. Preocupados com a Elsa, os amigos foram telefonando ao longo do dia.

Num dos telefonemas, a Elsa disse-lhes que a sua temperatura corporal era  $38^{\circ}\text{C}$  e, no telefonema seguinte, disse-lhes que já era  $37,8^{\circ}\text{C}$ .

Quanto tempo decorreu entre os dois telefonemas?

Apresente o resultado, em horas, arredondado às unidades.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) com arredondamento às décimas.

7. Um dos aspetos mais importantes para que um *Interrail* decorra de acordo com o planeado é o cumprimento dos horários dos comboios.

7.1. Na Tabela 4, estão parcialmente registados os dados relativos aos tempos de atraso de comboios, em minutos, arredondados à unidade.

Tabela 4

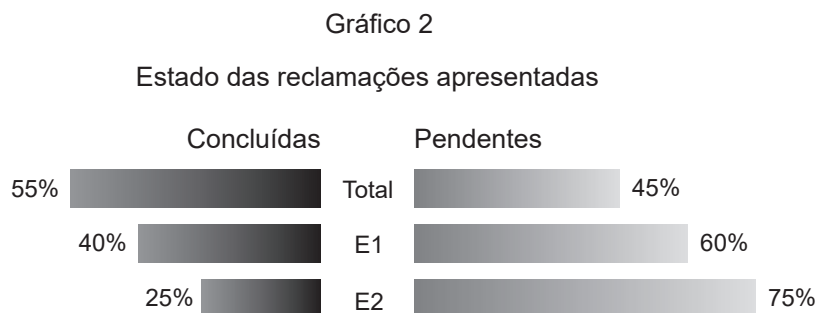
Tempo de atraso (min)	N.º de comboios	Frequência absoluta acumulada
0		2
2		14
4	$a$	
5	13	37
$b$	13	
15		
17		100

Admita que a mediana do conjunto de dados apresentados na Tabela 4 é 11 minutos e que todos os valores em falta na tabela são diferentes de zero.

Determine os valores de  $a$  e de  $b$ .

7.2. O atraso dos comboios é um dos motivos que levam os clientes a apresentarem reclamações. Uma companhia ferroviária apresentou, no seu relatório de qualidade do ano 2019, o ponto de situação relativamente às reclamações apresentadas. Estas foram classificadas como concluídas (respondidas) ou pendentes (a aguardar resposta).

No Gráfico 2, indicam-se os dados referentes ao total das reclamações apresentadas e às apresentadas em duas das estações, E1 e E2.



7.2.1. Sabe-se que, do conjunto das reclamações apresentadas em todas as estações daquela companhia, 13 680 se encontram pendentes e que, do total das reclamações apresentadas, 40% são da estação E2.

Quantas reclamações apresentadas na estação E2 estão pendentes?

7.2.2. Foram seleccionadas, ao acaso, duas das reclamações apresentadas.

A primeira foi escolhida de entre as apresentadas na estação E1 e a segunda foi escolhida de entre as apresentadas na estação E2.

Qual é a probabilidade de ambas se encontrarem no mesmo estado?

- (A) 0,1                      (B) 0,45                      (C) 0,55                      (D) 0,88

8. Sempre que viaja, a Maria efetua as reservas dos alojamentos utilizando quatro plataformas *online*, A, B, C e D, e nunca cancela nenhuma das reservas que efetua.

Na Figura 2, apresenta-se o gráfico circular construído com base nas reservas efetuadas pela Maria em cada uma das plataformas, no qual estão registadas as amplitudes dos sectores circulares que o compõem.

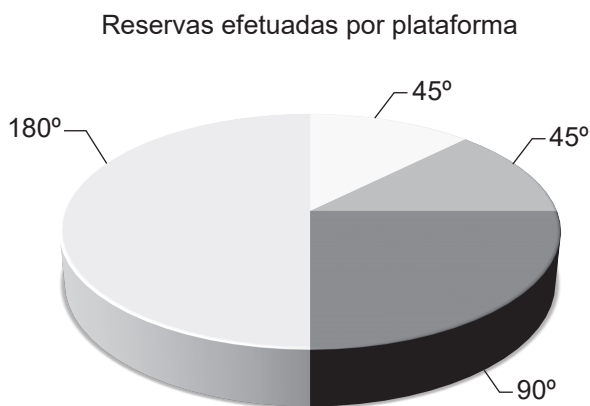


Figura 2

- 8.1. Depois da estadia, a Maria avalia, através da plataforma de reservas, a qualidade dos serviços prestados em cada um dos alojamentos.

Sabe-se que:

- um dos sectores de menor amplitude do gráfico circular apresentado na Figura 2 corresponde às reservas efetuadas na plataforma A;
- quando fica em alojamentos reservados através da plataforma A, a Maria atribui ao alojamento a classificação de Muito Bom em metade dos casos;
- quando não fica em alojamentos reservados através da plataforma A, a Maria atribui ao alojamento a classificação de Muito Bom em apenas um de cada sete casos.

Escolhe-se, ao acaso, um alojamento a que Maria atribuiu Muito Bom.

Determine a probabilidade de esse alojamento ter sido reservado através da plataforma A.

- 8.2. Admita que, do gráfico circular apresentado na Figura 2, o sector cuja amplitude é  $90^\circ$  corresponde às reservas efetuadas na plataforma C.

Das reservas que a Maria efetua:

- 10 são reservas realizadas na plataforma C;
- 30% são para alojamentos no estrangeiro;
- 20% são reservas realizadas na plataforma C e para alojamentos no estrangeiro.

Determine o número de reservas que não são realizadas através da plataforma C nem são para um alojamento no estrangeiro.

9. No final de um ano, fez-se um estudo estatístico relativo à variável aleatória «duração, em minutos, da viagem de comboio entre as estações E1 e E2».

Essa variável é bem modelada por uma distribuição normal com valor médio  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ .

Escolhe-se, aleatoriamente, uma das viagens.

Admita que a probabilidade de essa viagem ter uma duração até 43 minutos é, aproximadamente, 0,72.

Qual pode ser o valor médio e o desvio padrão da variável em estudo?

- (A)  $\mu = 36; \sigma = 3$       (B)  $\mu = 39; \sigma = 3$       (C)  $\mu = 36; \sigma = 7$       (D)  $\mu = 39; \sigma = 7$

10. Numa amostra aleatória de 256 pessoas que realizaram apenas um *Interrail* em 2019 verificou-se que, em média, visitaram 5 países e que o valor do desvio padrão dessa amostra é de 3,9.

Obtenha a margem de erro de um intervalo de confiança a 99% para o número médio de países visitados pelas pessoas que realizaram apenas um *Interrail* em 2019.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

**FIM**

## COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 3 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	<b>1.</b>				<b>2.</b>				<b>7.1.</b>			<b>Subtotal</b>
Cotação (em pontos)	20				18				18			<b>56</b>
Destes 11 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	<b>3.</b>	<b>4.</b>	<b>5.</b>	<b>6.1.</b>	<b>6.2.</b>	<b>7.2.1.</b>	<b>7.2.2.</b>	<b>8.1.</b>	<b>8.2.</b>	<b>9.</b>	<b>10.</b>	<b>Subtotal</b>
Cotação (em pontos)	8 x 18 pontos											<b>144</b>
<b>TOTAL</b>												<b>200</b>

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

**Prova 835**

2.<sup>a</sup> Fase



## **Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais**

### **Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2020**

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

#### **Critérios de Classificação**

8 Páginas

### **CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO**

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

#### **ITENS DE SELEÇÃO**

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

#### **ITENS DE CONSTRUÇÃO**

Nos itens de construção, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e aos itens de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).

8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.  As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista.  As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.  As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada.  Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas.

**Nota** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... 20 pontos
- Indicar o número mínimo de votos para obter maioria absoluta (12) ..... 3 pontos
- Calcular o número de votos, como primeira preferência, em cada uma das cidades ..... 3 pontos  
[Veneza – 8; Florença – 7; Milão – 5; Nápoles – 3]
- Eliminar Nápoles ..... 2 pontos
- Calcular o número de votos, como primeira preferência, em cada uma das cidades, após a eliminação de Nápoles ..... 4 pontos  
[Veneza – 11; Florença – 7; Milão – 5]
- Eliminar Milão ..... 2 pontos
- Calcular o número de votos, como primeira preferência, em cada uma das cidades, após a eliminação de Milão ..... 4 pontos  
[Veneza – 11; Florença – 12]
- Concluir ..... 2 pontos  
[A Maria e os amigos planeiam visitar Florença a seguir a Roma.]
2. .... 18 pontos
- Identificar que, na primeira volta, foi atribuída uma parcela do mapa ao Pedro .... 2 pontos
- Justificar, referindo que o Pedro foi o último que retificou a parcela do mapa na primeira volta ..... 2 pontos
- Identificar que, na segunda volta, foi atribuída uma parcela do mapa à Maria ..... 2 pontos
- Justificar, referindo que para a 3.<sup>a</sup> volta começar com a Elsa, a Maria terá de ser a última a retificar, ficando com a 2.<sup>a</sup> parcela do mapa ..... 5 pontos
- Identificar que, na terceira volta, foi atribuída uma parcela do mapa ao Carlos .... 2 pontos
- Justificar, referindo que o Carlos foi o último a retificar a parcela do mapa, pois a terceira volta iniciou-se com a Elsa ..... 5 pontos
3. .... 18 pontos
- Indicar a ordenação das arestas seleccionadas pelo algoritmo descrito (**nota**) ..... 10 pontos  
[Munique – Salzburgo; Milão – Zurique; Munique – Zurique; Paris – Milão; Salzburgo – Paris]
- Apresentar um grafo com as arestas seleccionadas ..... 5 pontos
- Identificar os vértices ..... 2 pontos
- Desenhar as arestas ..... 3 pontos
- Apresentar um percurso de acordo com o pedido ..... 3 pontos  
[Os percursos possíveis são:  
Paris – Milão – Zurique – Munique – Salzburgo – Paris ou  
Paris – Salzburgo – Munique – Zurique – Milão – Paris.]
- Nota** – A pontuação desta etapa não é desvalorizada caso o grafo apresentado contenha esta informação.

4. .... 18 pontos

Calcular o valor total a pagar pelo grupo de amigos caso optem pelo alojamento no hotel H1, quando reservado na plataforma B ..... 7 pontos

Determinar o valor a pagar por noite (202,50 €) ..... 5 pontos

Obter o valor a pagar pelas 2 noites (405 €) ..... 2 pontos

Calcular o valor total a pagar pelo grupo de amigos caso optem pelo alojamento no hotel H2, quando reservado na plataforma A ..... 9 pontos

Determinar o valor a pagar pelo alojamento pelas 2 noites (310 €) .. 2 pontos

Determinar o valor a pagar pelo passe turístico para os cinco amigos (236,25 €) ..... 5 pontos

Obter o valor total a pagar (546,25 €) ..... 2 pontos

Concluir ..... 2 pontos

[O grupo de amigos deve selecionar o hotel H1.]

5. .... 18 pontos

(B)

6.1. .... 18 pontos

Identificar  $t = 0$  ..... 4 pontos

Determinar  $C(0)$  (39) ..... 3 pontos

Obter  $t = 5,5$  ..... 4 pontos

Determinar  $C(5,5)$  ( $\approx 38,440$ ) ..... 3 pontos

Obter  $C(0) - C(5,5) > 0,5$  ..... 2 pontos

Concluir ..... 2 pontos

[Exemplo: Não terá sido necessário recorrer a outro medicamento, uma vez que a temperatura corporal da Elsa diminuiu um valor superior a  $0,5^\circ\text{C}$ .]

6.2. .... 18 pontos

Apresentar o(s) gráfico(s) ..... 4 pontos

Apresentar as coordenadas dos pontos relevantes [(10,0; 38) e (12,1; 37,8)] ..... (4 + 4)..... 8 pontos

Determinar o valor solicitado (2 horas) ..... 6 pontos

7.1. .... 18 pontos

Determinar o valor de  $a$  ..... 5 pontos

Determinar a frequência absoluta acumulada de 4 (24) ..... 3 pontos

Obter o valor de  $a$  (10) ..... 2 pontos

Determinar o valor de  $b$  ..... 13 pontos

Determinar a frequência absoluta acumulada de  $b$  (50) ..... 2 pontos

Escrever  $\frac{b+15}{2} = 11$  (ou equivalente) ..... 6 pontos

Obter o valor de  $b$  (7) ..... 5 pontos

7.2.1. .... 18 pontos

Determinar o total de reclamações (30 400) ..... 6 pontos

Determinar o total das reclamações apresentadas na estação E2 (12 160) .... 6 pontos

Determinar o valor solicitado (9 120) ..... 6 pontos

7.2.2. .... 18 pontos

(C)

8.1. .... 18 pontos

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

$A$ : «Ficar em alojamentos reservados através da plataforma A»

$M$ : «Atribuir a classificação de Muito Bom ao alojamento»

Calcular  $P(A \cap M)$  ..... 6 pontos

Obter  $P(A) \left(\frac{1}{8}\right)$  ..... 2 pontos

Escrever  $P(M|A) = \frac{1}{2}$  ..... 1 ponto

Obter  $P(A \cap M) \left(\frac{1}{16}\right)$  ..... 3 pontos

Calcular  $P(M)$  ..... 8 pontos

Calcular  $P(\bar{A} \cap M)$  ..... 6 pontos

Calcular  $P(\bar{A}) \left(\frac{7}{8}\right)$  ..... 2 pontos

Escrever  $P(M|\bar{A}) = \frac{1}{7}$  ..... 1 ponto

Obter  $P(\bar{A} \cap M) \left(\frac{1}{8}\right)$  ..... 3 pontos

Obter  $P(M) \left(\frac{3}{16}\right)$  ..... 2 pontos

Calcular  $P(A|M) \left(\frac{1}{3}\right)$  ..... 4 pontos

8.2. .... 18 pontos

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

$C$ : «A reserva é feita através da plataforma C»

$E$ : «A reserva é feita para um alojamento no estrangeiro»

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Obter $P(C)$ (0,25) .....	2 pontos
Escrever $P(E) = 0,3$ .....	1 ponto
Escrever $P(C \cap E) = 0,2$ .....	1 ponto
Calcular $P(\bar{E})$ (0,7) .....	2 pontos
Calcular $P(C \cap \bar{E})$ (0,05) .....	3 pontos
Calcular $P(\bar{C} \cap \bar{E})$ (0,65) .....	3 pontos
Obter o valor solicitado (26) .....	6 pontos

**2.º Processo**

Obter $P(C)$ (0,25) .....	2 pontos
Obter o número total de reservas (40) .....	2 pontos
Escrever $P(E) = 0,3$ .....	1 ponto
Calcular o número de reservas para alojamentos no estrangeiro (12) .....	2 pontos
Calcular o número de reservas para alojamentos que não são no estrangeiro (28) .....	2 pontos
Escrever $P(C \cap E) = 0,2$ .....	1 ponto
Calcular o número de reservas realizadas na plataforma C para alojamentos no estrangeiro (8) .....	3 pontos
Calcular o número de reservas realizadas na plataforma C que não são para alojamentos no estrangeiro (2) .....	3 pontos
Obter o valor solicitado (26) .....	2 pontos

9. .... 18 pontos

(D)

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Identificar os valores de  $n$ ,  $\bar{x}$ ,  $s$  e  $z$  para um intervalo de confiança a 99% ..... 4 pontos

$n = 256$  ..... 1 ponto

$\bar{x} = 5$  ..... 1 ponto

$s = 3,9$  ..... 1 ponto

$z = 2,576$  ..... 1 ponto

Calcular os extremos do intervalo de confiança  $([4,371; 5,629[)$  ..... 10 pontos

Calcular a margem de erro  $(0,63)$  ..... 4 pontos

**2.º Processo**

Identificar os valores de  $n$ ,  $s$  e  $z$  para um intervalo de confiança a 99% ..... 3 pontos

$n = 256$  ..... 1 ponto

$s = 3,9$  ..... 1 ponto

$z = 2,576$  ..... 1 ponto

Calcular a margem de erro ..... 15 pontos

Escrever  $\varepsilon = z \frac{s}{\sqrt{n}}$  (ou equivalente) ..... 9 pontos

Obter a margem de erro  $(0,63)$  ..... 6 pontos

**COTAÇÕES**

As pontuações obtidas nas respostas a estes 3 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	<b>1.</b>		<b>2.</b>				<b>7.1.</b>				<b>Subtotal</b>	
Cotação (em pontos)	20		18				18				<b>56</b>	
Destes 11 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	<b>3.</b>	<b>4.</b>	<b>5.</b>	<b>6.1.</b>	<b>6.2.</b>	<b>7.2.1.</b>	<b>7.2.2.</b>	<b>8.1.</b>	<b>8.2.</b>	<b>9.</b>	<b>10.</b>	<b>Subtotal</b>
Cotação (em pontos)	8 x 18 pontos											<b>144</b>
<b>TOTAL</b>												<b>200</b>