REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

A prova inclui 11 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy
- as coordenadas dos vértices E e G são $(7, 2, 15)$ e $(6, 10, 13)$, respetivamente;
- a reta EF é definida pela equação
  $(x, y, z) = (1, -2, 19) + k(-3, -2, 2), \ k \in \mathbb{R}$

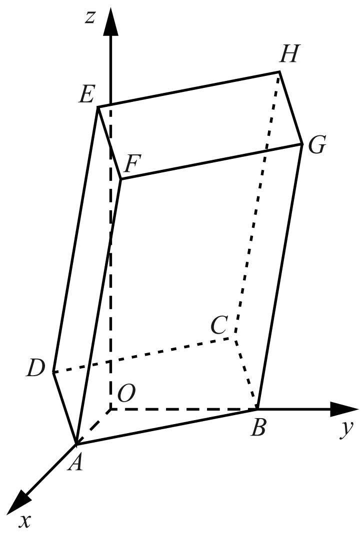

Figura 1

*** 1.1.** Qual das equações seguintes define uma reta perpendicular à reta EF e que passa no ponto E?

(A) $(x, y, z) = (7, -3, 3) + k(2, -3, 0), \ k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (7, 2, 15) + k(0, 3, -3), \ k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (7, -10, 3) + k(0, 3, 3), \ k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (7, 2, 15) + k(2, 0, -3), \ k \in \mathbb{R}$

*** 1.2.** Determine, sem recorrer à calculadora, a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto B e que passa no ponto D

2. Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro em O e raio 3 e o triângulo $[ABC]$

Sabe-se que:

- o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro da circunferência;
- α é a inclinação da reta AB $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Ox
- a reta BC é paralela ao eixo Oy

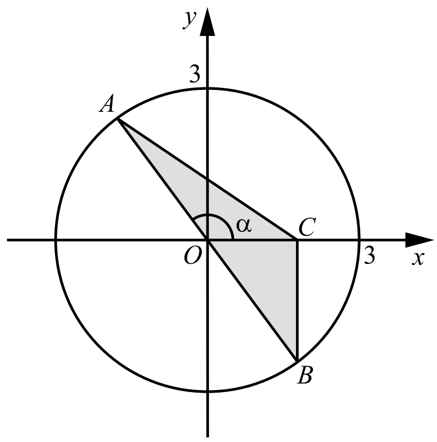

Figura 2

Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada pela expressão

$$-9 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

*** 3.** Numa escola frequentada por estudantes portugueses e estrangeiros, 60% dos alunos são raparigas e 15% são rapazes estrangeiros.

Escolheu-se, ao acaso, um aluno dessa escola e verificou-se que era um rapaz.

Qual é a probabilidade de ele ser português?

(A) 45% **(B)** 50% **(C)** $57{,}5\%$ **(D)** $62{,}5\%$

*** 4.** O corfebol é um desporto coletivo misto, com origem na Holanda.

Um clube de corfebol de um certo país vai participar num torneio internacional.

A comitiva vai deslocar-se por via terrestre, utilizando um automóvel de cinco lugares e uma carrinha de nove lugares. A comitiva é constituída por três dirigentes, um treinador, cinco jogadores do sexo masculino e cinco do sexo feminino.

Escreva uma expressão que dê o número de maneiras diferentes de distribuir os catorze elementos da comitiva pelos catorze lugares disponíveis, sabendo-se que os dois condutores são dois dos dirigentes e que, no automóvel, vão dois jogadores de cada sexo.

5. Uma turma de 11.º ano é constituída por 30 alunos com idades de 15, 16 e 17 anos, dos quais 60% são raparigas. Sabe-se que um terço dos rapazes tem 17 anos e que um terço das raparigas tem 15 ou 16 anos.

O André e a Beatriz, alunos da turma, são gémeos e têm 16 anos.

Escolhem-se, ao acaso, cinco alunos da turma.

Determine a probabilidade de o grupo constituído por esses cinco alunos ser formado pelo André, pela Beatriz, por dois jovens com 17 anos e por outro com 15 ou 16 anos.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

*** 6.** Seja (v_n) uma progressão geométrica.

Sabe-se que $v_5 = 4$ e que $v_8 = 108$

Qual é o valor de v_6?

(A) 12 **(B)** 24 **(C)** 48 **(D)** 60

7. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

Determine, sem recorrer à calculadora, quantos termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) pertencem ao intervalo $\left[\dfrac{83}{41}, \dfrac{67}{33}\right]$

✱ 8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{28}}$

Seja w o número complexo tal que $w = \frac{z_1}{z_2}$

Sabe-se que, no plano complexo, o afixo do número complexo w é um dos vértices de um polígono regular com centro na origem do referencial e com outro vértice sobre o semieixo real positivo.

Qual é o número mínimo de vértices desse polígono?

(A) 7 **(B)** 14 **(C)** 21 **(D)** 28

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = 1 + 2i$ e $z_3 = 2 - i$

Seja w o número complexo tal que $w = \frac{z_1 \times z_2}{z_3}$

Mostre, sem recorrer à calculadora, que a proposição seguinte é verdadeira.

$$|w| = \sqrt{13} \quad \wedge \quad \operatorname{Arg}(w) \in \left]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[$$

10. Seja f a função, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2(1 + 2\ln x) & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{5 - 5e^{x-1}}{x^2 + 3x - 4} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Resolva os itens **10.1.** e **10.2.** sem recorrer à calculadora.

✱ 10.1. Averigue se a função f é contínua em $x = 1$

✱ 10.2. Estude, no intervalo $]0,1[$, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

11. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja g a função, de domínio $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, definida por $g(x) = x\cos x + \operatorname{sen} x$

Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$

12. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \dfrac{x^3}{2x^2 - \ln x}$

Estude a função h quanto à existência de assíntota oblíqua ao seu gráfico e, caso esta exista, escreva a sua equação reduzida.

13. A Figura 3 representa um depósito de forma cilíndrica, instalado na horizontal, que contém uma certa quantidade de combustível.

Sabe-se que as bases do cilindro têm $1{,}8$ metros de diâmetro.

Num certo instante, iniciou-se o vazamento do depósito.

Seja $a(t)$ a altura, em metros, do combustível no depósito, t minutos após o início do vazamento.

Admita que $a(t) = 1{,}8 - (0{,}216 + 0{,}0039t)^{\frac{2}{3}}$

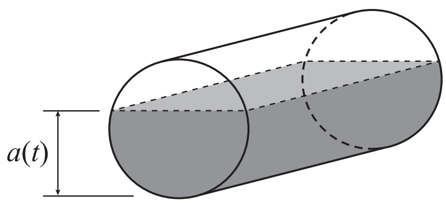

Figura 3

*** 13.1.** Qual é, em metros, a diferença entre a altura do combustível no depósito no início do vazamento e a altura do combustível quando este ocupa metade da capacidade do depósito?

(A) $0{,}72$ **(B)** $0{,}54$ **(C)** $0{,}36$ **(D)** $0{,}27$

*** 13.2.** Decorridos t_1 minutos após o início do vazamento, a altura do combustível no depósito é igual a um certo valor.

Sabe-se que, passado igual período de tempo, a altura do combustível no depósito é igual a metade desse valor.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t_1, sabendo que esse valor existe e é único.

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

14. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da equação

$$\ln\left((1-x)e^{x-1}\right) = x$$

15. Considere, para um certo número real positivo k, as funções f e g, de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, definidas por $f(x) = k \operatorname{sen}(2x)$ e $g(x) = k \cos x$

Sejam, num referencial ortonormado do plano, A, B e C os pontos de intersecção dos gráficos de f e g, sendo A o ponto de menor abcissa e C o ponto de maior abcissa.

Sabe-se que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de k

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.1.</td><td>1.2.</td><td>3.</td><td>4.</td><td>6.</td><td>8.</td><td>10.1.</td><td>10.2.</td><td>13.1.</td><td>13.2.</td><td>15.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>144</td></tr>
<tr><td>Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td>2.</td><td>5.</td><td>7.</td><td>9.</td><td>11.</td><td>12.</td><td>14.</td><td colspan="4"></td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="11">4 × 14 pontos</td><td>56</td></tr>
<tr><td colspan="12">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Critérios de Classificação 11 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. .... **12 pontos**

Opção **(C)**

1.2. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que o vetor de coordenadas $(-3, -2, 2)$ é normal ao plano ABG .... 1 ponto

Escrever $-3x - 2y + 2z + d = 0$ .... 2 pontos

Escrever $-3 \times 6 - 2 \times 10 + 2 \times 13 + d = 0$ .... 2 pontos

Obter o valor de d .... 1 ponto

Obter as coordenadas do ponto B .... 3 pontos

Determinar o raio da superfície esférica .... 3 pontos

Escrever a equação reduzida da superfície esférica
$\left(x^2 + (y-6)^2 + z^2 = 69\right)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Designemos por b a ordenada do ponto B

Reconhecer que o ponto B tem coordenadas $(0, b, 0)$ .... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GB}$ .... 2 pontos

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GE}$ .... 2 pontos

Escrever $\overrightarrow{GB} \, . \, \overrightarrow{GE} = 0$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Determinar o valor de b .... 2 pontos

Determinar o raio da superfície esférica .... 3 pontos

Escrever a equação reduzida da superfície esférica
$\left(x^2 + (y-6)^2 + z^2 = 69\right)$ .... 2 pontos

2. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Indicar as coordenadas do ponto A, em função de α .... 3 pontos

Indicar a ordenada do ponto B, em função de α .... 2 pontos

Indicar a abcissa do ponto C, em função de α .... 2 pontos

Escrever $\overline{CB}$, em função de α .... 2 pontos

Obter a altura do triângulo, em função de α .... 3 pontos

Obter a expressão pretendida (**ver nota**) .... 2 pontos

2.º Processo

Indicar a ordenada do ponto A, em função de α .... 2 pontos

Indicar a ordenada do ponto B, em função de α .... 2 pontos

Indicar a abcissa do ponto C, em função de α .... 2 pontos

Determinar a área do triângulo $[AOC]$, em função de α .... 3 pontos

Determinar a área do triângulo $[BOC]$, em função de α .... 3 pontos

Obter a expressão pretendida (**ver nota**) .... 2 pontos

Nota – Se a expressão apresentada não for $-9 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

3. .... **12 pontos**

Opção **(D)**

4. .... **14 pontos**

Apresentar a expressão

$\left({}^3A_2 \times {}^5C_2 \times {}^5C_2 \times 4! \times 8! \text{ ou equivalente}\right)$ (**ver nota**) .... 14 pontos

Nota – Por cada fator incorreto ou não apresentado, devem ser descontados 3 pontos. Caso seja considerada a operação adição, em vez da operação multiplicação, na conjugação das contagens dos elementos da comitiva em cada um dos veículos, devem ser descontados 5 pontos.
Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, a classificação a atribuir à resposta é 0 pontos.

5. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar o número de alunos com 17 anos e o número de alunos com 15 ou 16 anos .... 2 pontos

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^{30}C_5$ (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: ${}^{16}C_2 \times 12$ (**ver notas 2 e 3**) .... 6 pontos

Obter a probabilidade pedida $(0{,}01)$ (**ver nota 4**) .... 2 pontos

2.º Processo

Determinar o número de alunos com 17 anos e o número de alunos com 15 ou 16 anos .... 2 pontos

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^{30}A_5$ (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: ${}^{16}C_2 \times 12 \times 5!$ (**ver notas 2 e 3**) .... 6 pontos

Obter a probabilidade pedida $(0{,}01)$ (**ver nota 4**) .... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{30}C_5$ (1.º processo de resolução) ou a ${}^{30}A_5$ (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada for equivalente a ${}^{16}C_2 \times 14$ (1.º processo de resolução) ou a ${}^{16}C_2 \times 14 \times 5!$ (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 3 pontos.
3. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{16}C_2 \times 12$ ou a ${}^{16}C_2 \times 14$ (1.º processo de resolução), ou a ${}^{16}C_2 \times 12 \times 5!$ ou a ${}^{16}C_2 \times 14 \times 5!$ (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
4. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação de 0 pontos deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0, 1]$

6. .... **12 pontos**

Opção **(A)**

7. .... **14 pontos**

Reconhecer que, para n ímpar, $u_n = 2 + \frac{1}{n}$ .... 4 pontos

Escrever $2 + \frac{1}{n} \geq \frac{83}{41} \wedge 2 + \frac{1}{n} \leq \frac{67}{33}$ .... 4 pontos

Obter $n \geq 33 \wedge n \leq 41$ .... 3 pontos

Responder ao problema (5) .... 3 pontos

8. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

9. .... **14 pontos**

Escrever $w = \dfrac{(-3+2i)(1+2i)}{2-i}$ .... 1 ponto

Obter $w = \dfrac{-7-4i}{2-i}$ .... 2 pontos

Escrever $w = \dfrac{(-7-4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$ .... 2 pontos

Obter $w = -2-3i$ .... 3 pontos

Determinar $|w|$ .... 3 pontos

Justificar que $\operatorname{Arg}(w) \in \left]-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{2}\right[$ .... 3 pontos

10.1. .... **14 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(-x^2(1+2\ln x)\right)$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ .... 10 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} = -5 \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{e^{x-1}-1}{(x-1)(x+4)}$ .... 3 pontos

Escrever

$-5 \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{e^{x-1}-1}{(x-1)(x+4)} = -5 \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{e^{x-1}-1}{x-1} \times \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x+4}$ .. 2 pontos

Escrever

$-5 \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{e^{x-1}-1}{x-1} \times \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x+4} \underset{y=x-1}{=} -\lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{e^y-1}{y}$ .... 3 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -1$ .... 1 ponto

Referir que $f(1) = -1$ .... 1 ponto

Concluir que a função f é contínua em $x=1$ .... 1 ponto

10.2. .... **14 pontos**

Determinar $f'(x)$ em $]0,1[$ (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Escrever $f'(x)=0$ .... 1 ponto

Determinar o zero de f' em $]0,1[$ .... 2 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f em $]0,1[$
(ou equivalente) .... 4 pontos

Apresentar os intervalos de monotonia da função em $]0,1[$ (**ver nota 2**) ..... 1 ponto

Reconhecer que o extremo relativo é $f\left(\frac{1}{e}\right)$ .... 1 ponto

Determinar $f\left(\frac{1}{e}\right)$ $\left(\frac{1}{e^2}\right)$ .... 1 ponto

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
2. Se for referido que a função f é crescente em $\left]0,\frac{1}{e}\right[$, em vez de $\left]0,\frac{1}{e}\right]$, e decrescente em $\left]\frac{1}{e},1\right[$, em vez de $\left[\frac{1}{e},1\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

11. .... **14 pontos**

Determinar $g'(x)$ (**ver nota**) .... 3 pontos

Referir que a função g' é contínua em $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ .... 2 pontos

Calcular $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .... 2 pontos

Calcular $g'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ .... 2 pontos

Referir que $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)<-\frac{1}{2}<g'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ .... 3 pontos

Invocar o teorema de Bolzano-Cauchy para concluir o pretendido .... 2 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

12. .... **14 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}$ .... 5 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{2x^2-\ln x}}{x}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{2x^2-\ln x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2x^3-x\ln x}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \frac{1}{2}$ .... 3 pontos

Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[h(x) - \frac{1}{2}x\right]$ .... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[h(x) - \frac{1}{2}x\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - \ln x} - \frac{1}{2}x\right)$ ...... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - \ln x} - \frac{1}{2}x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{4x^2 - 2\ln x}$ ..... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[h(x) - \frac{1}{2}x\right] = 0$ .... 4 pontos

Concluir que a reta de equação $y = \frac{1}{2}x$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função h .... 1 pontos

13.1. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

13.2. .... **14 pontos**

Apresentar a equação

$$1{,}8 - (0{,}216 + 0{,}0078t)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \times \left(1{,}8 - (0{,}216 + 0{,}0039t)^{\frac{2}{3}}\right)$$

(ou uma equação equivalente) (**ver notas 1 e 2**) .... 5 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 3**) .... 4 pontos

Apresentar as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) .... 2 pontos

Apresentar o valor de t_1 na forma pedida $(2\,\text{h}\ 58\,\text{min})$ .... 3 pontos

Notas:

1. Se a equação apresentada não traduzir corretamente o problema, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, se for inequívoco que correspondem à resolução da equação que traduz corretamente o problema.
3. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

14. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar o domínio da condição .... 2 pontos

Escrever $\ln(1-x)+\ln e^{x-1}=x$ .... 4 pontos

Obter $\ln(1-x)+x-1=x$ .... 2 pontos

Obter $\ln(1-x)=1$ .... 2 pontos

Obter $1-x=e$ .... 3 pontos

Obter $x=1-e$ .... 1 ponto

2.º Processo

Determinar o domínio da condição .... 2 pontos

Escrever $(1-x)e^{x-1}=e^{x}$ .... 4 pontos

Obter $1-x=\dfrac{e^{x}}{e^{x-1}}$ .... 4 pontos

Obter $1-x=e$ .... 3 pontos

Obter $x=1-e$ .... 1 ponto

15. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Resolver a equação $k\operatorname{sen}(2x)=k\cos x$ em $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ .... 3 pontos

Escrever as coordenadas dos pontos A e C .... 1 ponto

Escrever as coordenadas do ponto B, com a ordenada em função de k .... 2 pontos

Determinar as coordenadas dos vectores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, em função de k .... 2 pontos

Determinar $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC}$, em função de k .... 2 pontos

Resolver a equação $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC}=0$ .... 2 pontos

Apresentar o valor de k $\left(\sqrt{\dfrac{8}{27}}\,\pi\right)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Resolver a equação $k\operatorname{sen}(2x)=k\cos x$ em $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ .... 3 pontos

Escrever as coordenadas dos pontos A e C .... 1 ponto

Escrever as coordenadas do ponto B, com a ordenada em função de k .... 2 pontos

Determinar $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, em função de k .... 2 pontos

Resolver a equação $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ .... 4 pontos

Apresentar o valor de k $\left(\sqrt{\frac{8}{27}\pi}\right)$ .... 2 pontos

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**3.**	**4.**	**6.**	**8.**	**10.1.**	**10.2.**	**13.1.**	**13.2.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	**144**
Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**5.**	**7.**	**9.**	**11.**	**12.**	**14.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	4 × 14 pontos											**56**
TOTAL												**200**