REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 11 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um trapézio $[PQRS]$, de bases $[PQ]$ e $[RS]$, em que o lado $[PS]$ é perpendicular às bases.

Tem-se $P(1,-1,2)$, $Q(-2,1,1)$ e $R(-5,5,-3)$

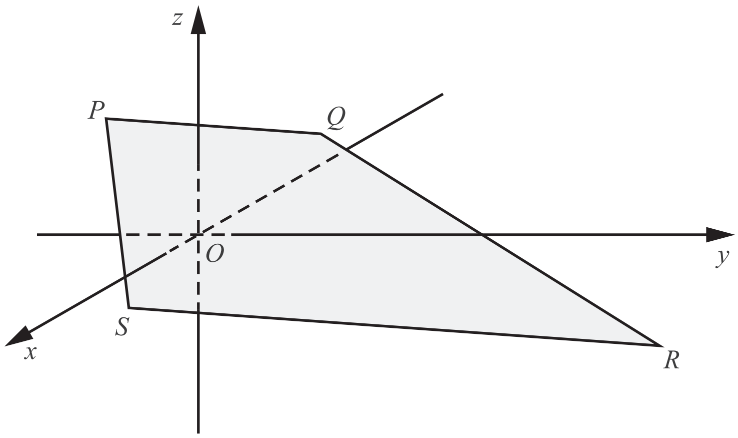

Figura 1

*** 1.1.** Qual das condições seguintes define a superfície esférica de centro no ponto R e que passa no ponto Q?

(A) $(x-5)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=59$

(B) $(x-5)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=41$

(C) $(x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=41$

(D) $(x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=59$

*** 1.2.** Determine uma equação do plano perpendicular à reta RS e que passa no ponto P

Apresente essa equação na forma $ax+by+cz+d=0$

2. Sabe-se que $\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{5}$ e que $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+2\cos\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$

Apresente o resultado na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}$ e $c\in\mathbb{N}$

3. Numa dada localidade, existe um clube onde se pratica badmínton e ténis.

*** 3.1.** Com doze raquetes distintas, sendo seis de badmínton e seis de ténis, formam-se, ao acaso, dois conjuntos de seis raquetes cada um.

Qual é o valor, arredondado às centésimas, da probabilidade de cada um dos dois conjuntos ficar com três raquetes de badmínton e três raquetes de ténis?

(A) $0{,}22$ **(B)** $0{,}43$ **(C)** $0{,}50$ **(D)** $0{,}87$

*** 3.2.** Relativamente a este clube, sabe-se que:

- cada sócio pratica uma e só uma das duas modalidades;
- 65% dos sócios são mulheres;
- $\frac{1}{7}$ dos homens pratica badmínton;
- $\frac{5}{6}$ dos praticantes de badmínton são mulheres.

Escolhe-se, ao acaso, um sócio deste clube.

Determine a probabilidade de o sócio escolhido ser uma mulher que pratica ténis.

Apresente o resultado na forma de percentagem.

4. Considere, num plano α, duas retas paralelas r e s

Assinalam-se, na reta r, cinco pontos distintos e, na reta s, um certo número n de pontos, igualmente distintos.

Sabe-se que, com os pontos assinalados nas duas retas, é possível definir exatamente 175 triângulos.

Determine o valor de n

*** 5.** Na Figura 2, está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{2\}$

A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função g

Seja (v_n) a sucessão de termo geral $v_n = 2 - \dfrac{5}{n+3}$

A que é igual $\lim g(v_n)$?

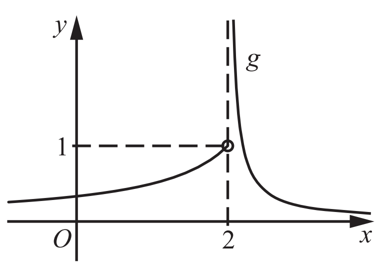

Figura 2

(A) 0 **(B)** 1

(C) 2 **(D)** $+\infty$

6. Seja (u_n) uma progressão aritmética.

Sabe-se que, relativamente a (u_n), a soma do sexto termo com o vigésimo é igual a -5 e que o décimo nono termo é igual ao quádruplo do sétimo termo.

Determine a soma dos dezasseis primeiros termos desta progressão.

* **7.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 2e^{i\frac{3\pi}{5}}$

Seja w o número complexo tal que $z \times w = i$

Qual dos valores seguintes é um argumento do número complexo w ?

(A) $\frac{19\pi}{10}$ **(B)** $\frac{2\pi}{5}$ **(C)** $-\frac{2\pi}{5}$ **(D)** $-\frac{19\pi}{10}$

8. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $(1+2i)z + (1-2i)\overline{z} + 10 = 0$ define, no plano complexo, uma reta.

Considere todos os números complexos cujos afixos pertencem a esta reta.

Determine qual deles tem menor módulo.

Apresente esse número complexo na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$

9. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - e^{-x}}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **9.1.** e **9.2.** sem recorrer à calculadora.

* **9.1.** Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

* **9.2.** Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -2

10. Seja h a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $h(x) = \operatorname{sen} x + \cos^2 x$

Estude, sem recorrer à calculadora, a função h quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

11. Num laboratório cuja temperatura ambiente é constante, aqueceu-se uma substância até atingir uma certa temperatura, superior à temperatura ambiente, e, a seguir, deixou-se arrefecer essa substância durante uma hora.

Admita que a temperatura dessa substância, em graus Celsius, t minutos após o início do arrefecimento, é dada por

$$T(t) = 20 + 100e^{-kt}, \quad 0 \leq t \leq 60$$

em que k é uma constante real positiva.

* **11.1.** Durante o arrefecimento, houve um instante t_1 em que a temperatura da substância foi 30 ºC.

Qual é o valor de k ?

(A) $\ln\left(\dfrac{10}{t_1}\right)$ **(B)** $t_1 - \ln 10$ **(C)** $\dfrac{\ln 10}{t_1}$ **(D)** $t_1 + \ln 10$

* **11.2.** Considere $k = 0{,}04$

Sabe-se que, durante os primeiros t_2 minutos, a taxa média de variação da função T foi igual a $-2{,}4$

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t_2, sabendo que esse valor existe e é único.

Apresente o resultado em minutos e segundos (segundos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às milésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

12. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, para um certo número real k, a função g, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{x^2 - x} + k & \text{se} \quad x < 0 \\[2ex] 2 + x \ln x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Sabe-se que existe $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

Determine o valor de k

13. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da equação

$$x \ln(1-x) - \ln(1-x) = (1-x)\ln(3-2x)$$

*** 14.** Na Figura 3, está representada a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- os pontos A, B e C pertencem à circunferência;
- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox e o ponto B pertence ao primeiro quadrante;
- a amplitude do ângulo BOC é igual ao dobro da amplitude do ângulo AOB
- a área do triângulo $[AOB]$ é igual a k $\left(0 < k < \frac{1}{2}\right)$

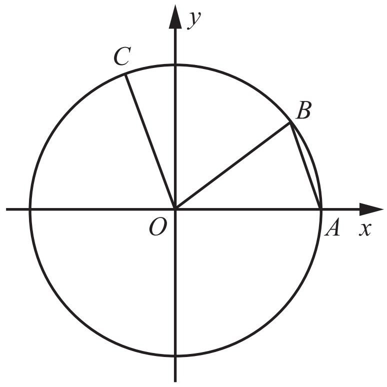

Figura 3

Mostre que a ordenada do ponto C é dada, em função de k, por $6k - 32k^3$

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**5.**	**7.**	**9.1.**	**9.2.**	**11.1.**	**11.2.**	**14.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	**144**
Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**4.**	**6.**	**8.**	**10.**	**12.**	**13.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	4 × 14 pontos											**56**
TOTAL												**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Critérios de Classificação 10 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. .... **12 pontos**

Opção **(C)**

1.2. .... **14 pontos**

Identificar o vetor $\overrightarrow{PQ}$ como um vetor normal ao plano pedido .... 3 pontos

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{PQ}$ .... 2 pontos

Escrever $-3x+2y-z+d=0$ .... 2 pontos

Escrever $-3\times 1+2\times(-1)-2+d=0$ .... 4 pontos

Obter o valor de d .... 1 ponto

Escrever uma equação do plano na forma pedida

$(-3x+2y-z+7=0$ ou outra equação equivalente$)$ .... 2 pontos

2. .... **14 pontos**

Escrever $\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$ .... 2 pontos

Concluir que $\cos\alpha=\frac{1}{5}$ .... 1 ponto

Escrever $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$ .... 2 pontos

Escrever $\cos\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha$ .... 2 pontos

Obter $\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{24}}{5}$ .... 3 pontos

Obter $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{24}$ .... 3 pontos

Apresentar o resultado na forma pedida $\left(\frac{-7\sqrt{24}}{5}\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ .... 1 ponto

3.1. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

3.2. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Designemos por M o acontecimento «o sócio escolhido é mulher», por H o acontecimento «o sócio escolhido é homem», por B o acontecimento «o sócio escolhido pratica badmínton» e por T o acontecimento «o sócio escolhido pratica ténis».

Escrever $P(M)=0{,}65$ .... 1 ponto

Obter $P(H)=0{,}35$ .... 1 ponto

Escrever $P(B\,|\,H)=\frac{1}{7}$ .... 2 pontos

Obter $P(B\cap H)=0{,}05$ .... 2 pontos

Escrever $P(M\,|\,B)=\frac{5}{6}$ .... 2 pontos

Escrever $P(B)=P(B\cap M)+P(B\cap H)$ .... 1 ponto

Obter $P(B\cap M)=0{,}25$ .... 3 pontos

Obter a probabilidade pedida (40%) .... 2 pontos

2.º Processo

Designemos por a a probabilidade de o sócio escolhido praticar badmínton.

Construir uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam «é homem, é mulher» e «pratica ténis, pratica badmínton» .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa à informação «65% dos sócios são mulheres» .... 2 pontos

Obter o valor a colocar na célula da tabela relativa à probabilidade de o sócio ser homem .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa à informação «$\frac{1}{7}$ dos homens pratica badmínton» .... 2 pontos

Colocar a na célula da tabela relativa à probabilidade de o sócio escolhido praticar badmínton .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa à informação «$\frac{5}{6}$ dos praticantes de badmínton são mulheres» .... 2 pontos

Determinar o valor de a .... 2 pontos

Obter a probabilidade pedida (40%) .... 3 pontos

4. .... **14 pontos**

Equacionar o problema .... 8 pontos

Escrever ${}^{5}C_2\times n$ .... 3 pontos

Escrever ${}^{n}C_2\times 5$ .... 3 pontos

Escrever a equação ${}^{5}C_2\times n+{}^{n}C_2\times 5=175$ .... 2 pontos

OU

Escrever ${}^{n+5}C_3$ .... 3 pontos

Escrever ${}^{n}C_3+{}^{5}C_3$ .... 3 pontos

Escrever a equação ${}^{n+5}C_3-\left({}^{n}C_3+{}^{5}C_3\right)=175$ .... 2 pontos

Resolver a equação .... 5 pontos

Apresentar o valor de n (7) (**ver nota**) .... 1 ponto

Nota – Se a etapa anterior tiver sido pontuada com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

5. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

6. .... **14 pontos**

Escrever $\begin{cases} u_6 + u_{20} = -5 \\ u_{19} = 4u_7 \end{cases}$ .... 2 pontos

Escrever $\begin{cases} u_1 + 5r + u_1 + 19r = -5 \\ u_1 + 18r = 4(u_1 + 6r) \end{cases}$

(ou um sistema equivalente, nas variáveis u_1 e r) .... 3 pontos

Obter o valor de r .... 2 pontos

Obter o valor de u_1 .... 2 pontos

Escrever $S_{16} = \dfrac{u_1 + u_1 + 15r}{2} \times 16$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter o valor de S_{16} (-22) .... 3 pontos

7. .... **12 pontos**

Opção **(A)**

8. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Seja $z = x + yi$

Escrever $(1+2i)(x+yi)+(1-2i)(x-yi)+10=0$ .... 2 pontos

Obter $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$ .... 5 pontos

Escrever $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2} \\ y = -2x \end{cases}$ .... 3 pontos

Resolver o sistema .... 3 pontos

Concluir que o número complexo pedido é $-1+2i$ .... 1 ponto

2.º Processo

Seja $z = x + yi$

Escrever $(1+2i)(x+yi)+(1-2i)(x-yi)+10=0$ .... 2 pontos

Obter $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$ .... 5 pontos

Escrever $z = x + \left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}\right)i$ .... 2 pontos

Obter $|z| = \sqrt{\dfrac{5x^2+10x+25}{4}}$ .... 2 pontos

Determinar a abcissa do vértice da parábola que é o gráfico da função real de variável real definida por $5x^2+10x+25$ .... 2 pontos

Concluir que o número complexo pedido é $-1+2i$ .... 1 ponto

9.1. .... **14 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ .... 7 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - e^{-x}}{x}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - e^{-x}}{x} = 1 - \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{x}$ .... 2 pontos

Escrever $1 - \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} \underset{y=-x}{=} 1 + \lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{e^{y}}{y}$ .... 3 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ .... 5 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 \right)$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 \right) = -3 + \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$ .... 1 ponto

Concluir que o gráfico de f não tem qualquer assíntota horizontal quando $x \to -\infty$ e que tem uma assíntota horizontal de equação $y=-2$ quando $x \to +\infty$ .... 2 pontos

9.2. .... **14 pontos**

Nota prévia – Se for utilizada a expressão $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3$, a classificação máxima a atribuir à resposta é 7 pontos.

Identificar o declive da reta pedida com $f'(-2)$ .... 2 pontos

Determinar $f'(-2)$ (**ver nota**) .... 7 pontos

Obter uma expressão de $f'(x)$, em $]-\infty, 0[$ .... 5 pontos

Obter $f'(-2)$ .... 2 pontos

Calcular $f(-2)$ .... 2 pontos

Obter a equação reduzida da reta pedida $\left(y = -\dfrac{e^2}{4}x + 1 \right)$ .... 3 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

10. .... **14 pontos**

Determinar $h'(x)$ (**ver nota 1**) .... 3 pontos

Escrever $h'(x)=0$ .... 1 ponto

Determinar os zeros de h' .... 2 pontos

Apresentar um quadro de sinal de h' e de monotonia de h (ou equivalente) .. 4 pontos

Apresentar os intervalos de monotonia da função (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Determinar $h(0)$ e $h\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $\left(1 \text{ e } \frac{5}{4}\right)$ .... 3 pontos

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
2. Se for referido que a função h é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{6}\right[$, em vez de $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, e decrescente em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$, em vez de $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

11.1. .... **12 pontos**

Opção **(C)**

11.2. .... **14 pontos**

Determinar $T(0)$ .... 2 pontos

Apresentar a equação $\frac{20+100e^{-0,04t}-120}{t}=-2,4$ (ou uma equação equivalente) (**ver notas 1 e 2**) .... 4 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 3**) .... 4 pontos

Apresentar a abcissa do ponto relevante .... 2 pontos

Apresentar o valor de t_2 na forma pedida $(28\,\text{min}\ 9\,\text{s})$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se a equação apresentada não traduzir corretamente o problema, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, se for inequívoco que correspondem à resolução da equação que traduz corretamente o problema.
3. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

12. .... **14 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$ .... 6 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + k \right)$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + k \right) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x(x^2 - 1)}{x(x - 1)} + k$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x(x^2 - 1)}{x(x - 1)} + k = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} + k$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 1 + k$ .... 2 pontos

Determinar $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ .... 7 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (2 + x \ln x)$ .... 1 ponto

Escrever

$\lim\limits_{x \to 0^+} (2 + x \ln x) \underset{y = \frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right) \right)$ .... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{y \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right) \right) = 2 - \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y}$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 2$ .... 1 ponto

Concluir que $k = 1$ .... 1 ponto

13. .... **14 pontos**

Determinar o domínio da condição .... 2 pontos

Obter $(x - 1) \ln(1 - x) = (1 - x) \ln(3 - 2x)$ .... 2 pontos

Obter $\ln\big((1 - x)(3 - 2x)\big) = 0$ .... 4 pontos

Obter $(1 - x)(3 - 2x) = 1$ .... 3 pontos

Resolver a equação $(1 - x)(3 - 2x) = 1$ .... 2 pontos

Apresentar a solução $\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

14. .... **14 pontos**

Designemos por α a amplitude do ângulo AOB

Determinar $\operatorname{sen} \alpha$, em função de k .... 2 pontos

Indicar a ordenada do ponto C, em função de α .... 2 pontos

Escrever $\operatorname{sen}(3\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha + 2\alpha)$ .... 2 pontos

Obter a expressão pedida .... 8 pontos

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**5.**	**7.**	**9.1.**	**9.2.**	**11.1.**	**11.2.**	**14.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	**144**
Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**4.**	**6.**	**8.**	**10.**	**12.**	**13.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	4 × 14 pontos											**56**
TOTAL												**200**