REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 7 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 5 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

1. O consumo energético das famílias portuguesas, proveniente de gás natural, tem aumentado nas últimas décadas.

Admita que, durante duas décadas, o consumo energético anual, G , em gás natural das famílias portuguesas, em terajoule (TJ), por ano, é dado por

$$G(t) = \frac{10\,765{,}05}{1+11{,}81\,e^{-0{,}49t}}$$

em que $t=0$ corresponde a 1997, $t=1$ corresponde a 1998, e assim sucessivamente.

* **1.1.** Determine o valor do consumo energético em gás natural das famílias portuguesas no ano de 2017, de acordo com o modelo apresentado.

Apresente o resultado em TJ , arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, seis casas decimais.

1.2. De acordo com o modelo apresentado, a partir de que ano o valor do consumo energético em gás natural, em TJ , por ano, passou a ser superior a 9000 ?

Justifique a sua resposta.

2. O António pretende mudar de empresa distribuidora de gás natural. Para esse efeito, está a fazer um estudo e selecionou duas empresas: A e B.

A empresa A apresenta o seguinte tarifário:

- parcela fixa: $0{,}1336$ euros por dia;
- parcela variável em função da energia consumida: $0{,}0479$ euros por kWh .

A empresa B apresenta o seguinte tarifário:

- parcela fixa: isento $(0$ euros por dia$)$;
- parcela variável em função da energia consumida: $0{,}0586$ euros por kWh .

2.1. O António analisou uma fatura de gás referente a 30 dias e verificou que o consumo energético foi $325\ \mathrm{kWh}$.

De acordo com os tarifários apresentados, em qual das empresas, A ou B, teria sido menor o valor a pagar pelo consumo energético em gás natural indicado na fatura?

Justifique a sua resposta.

* **2.2.** O António verificou que, a partir de um certo valor de consumo energético em gás natural, em kWh , por mês, lhe seria mais favorável optar pela empresa A.

Determine esse valor.

Apresente o resultado em kWh , arredondado às unidades.

Na sua resposta, considere um mês de 30 dias. Comece por apresentar expressões das funções, f e g , que relacionam o preço a pagar por mês com o consumo energético em gás natural, x , em kWh , nas empresas A e B, respetivamente.

3. No quintal que tem junto à sua casa, na zona de Leça da Palmeira, o António vai cultivar cogumelos e espargos para vender no mercado municipal de Matosinhos.

O António admite que o lucro que obterá por cada quilograma de cogumelos que cultivar é 3 euros e que o lucro que obterá por cada quilograma de espargos que cultivar é 4 euros.

Dadas as características do terreno, o cultivo destes dois produtos obedece às seguintes condições:

- a quantidade a cultivar de cada um dos produtos não pode exceder o dobro da quantidade a cultivar do outro produto;
- a quantidade total a cultivar destes dois produtos não pode exceder 9 quilogramas.

Determine a quantidade a cultivar de cada um dos produtos, de modo que, de acordo com as condições, o lucro total obtido com o cultivo dos mesmos seja máximo.

Na sua resposta, designe por x a quantidade, em quilogramas, de cogumelos a cultivar e designe por y a quantidade, em quilogramas, de espargos a cultivar, e apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

4. O António, quando se desloca ao mercado municipal de Matosinhos para vender os seus produtos agrícolas, utiliza a ponte móvel entre Leça da Palmeira e Matosinhos, no porto de Leixões. A Figura 1 é uma fotografia dessa ponte.

A ponte tem dois tabuleiros, geometricamente iguais, com apoios nas margens do rio Leça, que se movem, permitindo a passagem de barcos.

A Figura 2, que não está à escala, esquematiza a situação.

Figura 1

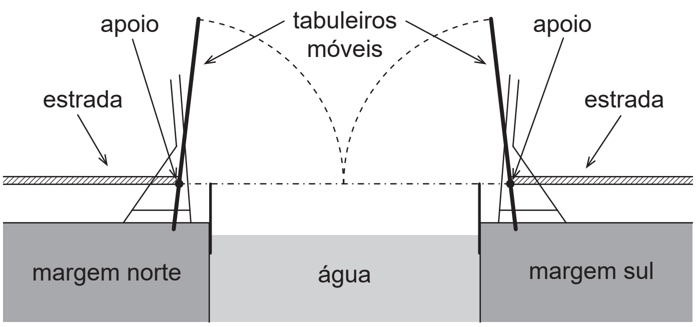

Figura 2

Considere o tabuleiro móvel situado na margem norte, representado por $[RP]$ na Figura 3.

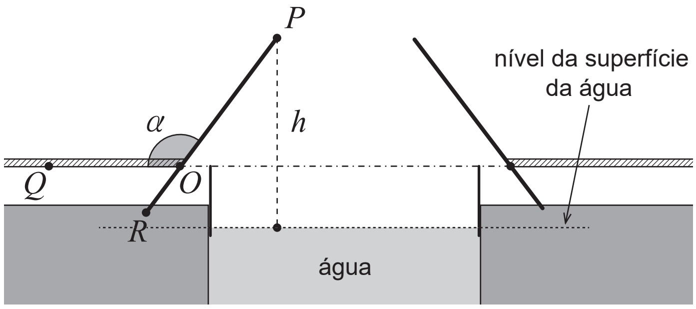

Figura 3

Nesta figura, que não está à escala:

- o ponto Q situa-se na estrada de acesso à ponte, na margem norte;
- o ponto O é o ponto que pertence à estrada e ao tabuleiro móvel, e representa um dos apoios;
- os pontos P e R acompanham o movimento do tabuleiro, enquanto o ponto O se mantém fixo.

Seja α a amplitude, em graus, do ângulo QOP .

Admita que, para cada valor de α , a altura, h , em metros, do ponto P em relação ao nível da superfície da água, considerando o nível médio do mar, é dada por

$$h(\alpha) = 46\,\text{sen}(\alpha) + 10{,}7 \quad , \quad \text{com} \quad 90^{\text{o}} \leq \alpha \leq 180^{\text{o}}$$

O argumento da função seno está em graus.

4.1. Determine o valor de α para o qual a altura do ponto P em relação ao nível da superfície da água é igual a 25 metros.

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

*** 4.2.** O vão desta ponte é a distância entre os dois apoios, representada por v no esquema da Figura 4, que não está à escala.

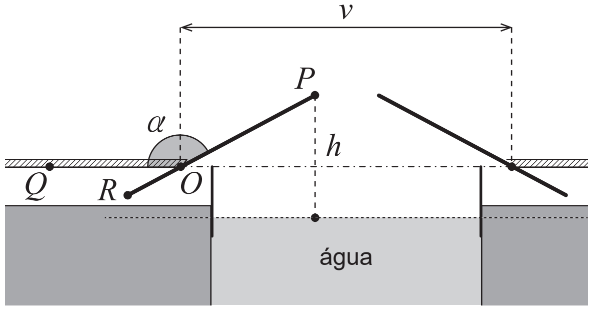

Figura 4

Determine o vão da ponte.

4.3. Seja T a função que dá a taxa de variação instantânea da função h , para cada valor de α .

Determine o valor de $T(135)$, arredondado às centésimas, e interprete-o no contexto da situação.

5. Nas noites quentes de verão, o António gosta de se sentar no pátio da sua casa a escutar o som dos grilos.

O som que os grilos produzem é originado por movimentos das asas, designados pulsos. O número de pulsos tende a aumentar com a subida da temperatura ambiente.

5.1. A Figura 5 é um diagrama de dispersão, no qual se relaciona o número de pulsos por segundo, y, com a temperatura ambiente, x, em graus Celsius $(^{\text{o}}\text{C})$. Este diagrama foi elaborado a partir de dados registados numa experiência com um grilo da espécie *Orocharis saltator*. Existe uma correlação linear forte entre as variáveis relacionadas. Nesta figura, está também representada a reta r, reta de regressão linear de y sobre x, e são indicadas as coordenadas dos pontos do diagrama de dispersão.

Estime, a partir da equação da reta r, o número de pulsos por segundo feitos pelo grilo quando a temperatura ambiente é igual a $22\ ^{\text{o}}\text{C}$.

Na sua resposta:

– apresente os valores dos parâmetros da equação da reta r arredondados às centésimas;

– apresente o valor pedido arredondado às unidades.

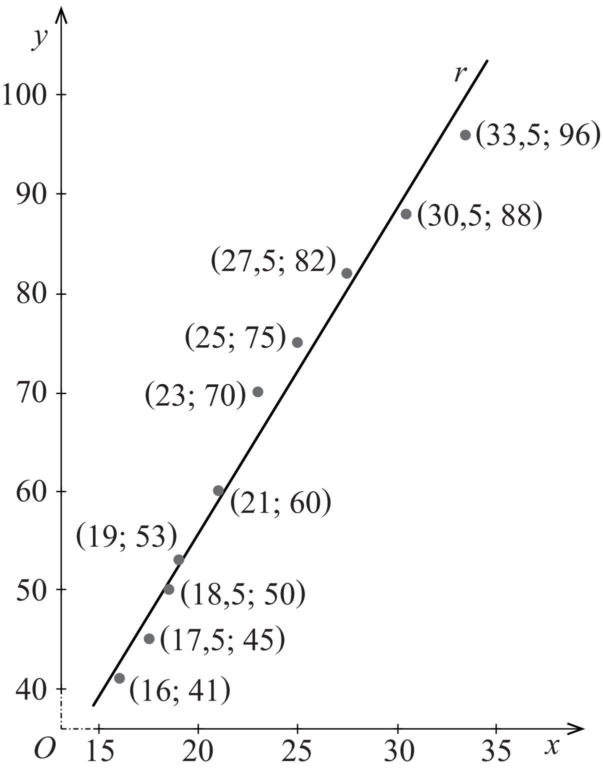

Figura 5

5.2. Admita que, para a espécie de grilos *Nemobius fasciatus*, a sequência que dá, aproximadamente, o número de pulsos por segundo para cada valor da temperatura ambiente, n, em graus Celsius, é definida por

$$u_n = 6n - 48 \quad , \quad \text{com} \quad n \in \{15, 16, ..., 38\}$$

* **5.2.1.** Justifique que os termos da sequência (u_n) são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

5.2.2. No âmbito de uma experiência, fizeram-se, durante alguns dias, duas audições por noite de um grilo da espécie *Nemobius fasciatus*, cada uma com a duração de um segundo. As temperaturas registadas em cada audição apresentam-se na tabela seguinte.

Dia	1.ª audição	2.ª audição
segunda-feira	21 ºC	20 ºC
terça-feira	23 ºC	22 ºC
quarta-feira	25 ºC	24 ºC
quinta-feira	27 ºC	26 ºC
sexta-feira	29 ºC	28 ºC

Determine o número total de pulsos do grilo ocorridos no conjunto das dez audições, de acordo com o modelo apresentado.

6. O António guarda, como recordação, uma bola de vidro, esférica e maciça, dentro de uma caixa cúbica. A bola é tangente à superfície interior de todas as faces da caixa.

A Figura 6 mostra, em referencial ortogonal e monométrico, $Oxyz$, um esquema da bola dentro da caixa. Neste esquema, que não está à escala, a bola está representada por uma esfera e a caixa pelo cubo $[ABCDEFGH]$.

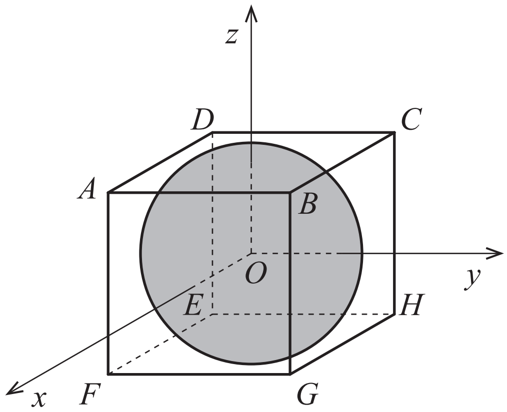

Figura 6

Sabe-se que:

- a esfera está inscrita no cubo;
- a origem do referencial coincide com o centro do cubo;
- os eixos Ox, Oy e Oz intersectam as faces do cubo nos centros das mesmas;
- o vértice D tem coordenadas $(-10, -10, 10)$.

A unidade do referencial é o centímetro.

Devido à fragilidade do vidro, o António preencheu todo o espaço vazio da caixa com um material de amortecimento.

Determine o volume que o material de amortecimento ocupa no interior da caixa cúbica onde o António guarda a bola, considerando desprezável a espessura da caixa.

Apresente o resultado em centímetros cúbicos, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

*** 7.** A fotografia da Figura 7 mostra um vaso, suspenso por cordas, que o António tem no pátio.

O vaso tem 12 cm de altura e a sua forma, considerando desprezável a sua espessura, é de parte de uma superfície esférica de raio $7{,}5 \text{ cm}$.

Na Figura 8, está representado um esquema do vaso e da superfície esférica.


Figura 7

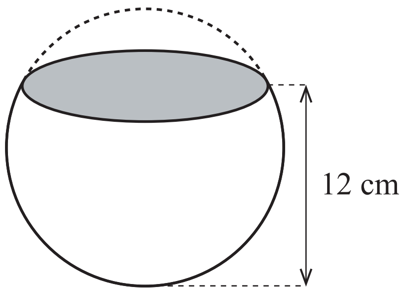

Figura 8

Determine o perímetro da abertura circular do vaso, representada a sombreado na Figura 8.

Apresente o resultado em centímetros, arredondado às décimas.

*** 8.** O António comprou duas mil batatas-sementes para semear num terreno que tem junto à sua casa.

Seja X a variável aleatória «massa, em gramas, de uma batata-semente tirada ao acaso dessas duas mil batatas-sementes».

Admita que X segue uma distribuição normal de valor médio 65 gramas e que $P(50 < X < 80) = 70\%$.

A tabela seguinte relaciona a massa, em gramas, de uma batata-semente com a massa, em quilogramas, do total das batatas produzidas a partir dessa batata-semente.

Massa da batata-semente (g)	Menor do que 50	Entre 50 e 80	Maior do que 80
Massa das batatas produzidas (kg)	$0{,}8$	m	$1{,}5$

Na tabela, m representa um número real positivo.

Com a sementeira das duas mil batatas-sementes, estima-se uma produção de 2230 kg de batatas.

Determine o valor de m .

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 7 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.2.**	**5.2.1.**	**7.**	**8.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	16	16	20	20	16	16	16	**120**
Destes 7 itens contribuem para a classificação final da prova os 5 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.2.**	**2.1.**	**4.1.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.2.**	**6.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	5 x 16 pontos							**80**
TOTAL								**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Critérios de Classificação 9 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista (ver nota).
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.

13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. .... **16 pontos**

Identificar 2017 com $t = 20$ .... 5 pontos

Calcular $G(20)$ .... 9 pontos

Apresentar o valor pedido $(10\ 758\ \text{TJ})$ .... 2 pontos

1.2. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Traduzir o problema por uma condição $(G(t) > 9000$, ou equivalente$)$
(**ver nota 1**) .... 3 pontos

Resolver a condição anterior .... 10 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

Processo A

Representar graficamente a função G (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = 9000$
(**ver nota 2**) .... 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos .... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto $(8{,}36...)$ .... 2 pontos

Processo B

Isolar $e^{-0{,}49t}$ .... 3 pontos

Isolar $-0{,}49t$ .... 5 pontos

Isolar t .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido (2006) (**ver nota 3**) .... 3 pontos

2.º Processo

Obter $G(8)$ .... 3 pontos

Obter $G(9)$ .... 3 pontos

Referir que $G(8) < 9000$ .... 2 pontos

Referir que $G(9) > 9000$ .... 2 pontos

Referir que a função G é crescente (ou equivalente) (**ver nota 4**) .... 3 pontos

Apresentar o valor pedido (2006) (**ver nota 3**) .... 3 pontos

Notas:

1. Se for apresentada $G(t) = 9000$, $G(t) \geq 9000$, $G(t) < 9000$ ou $G(t) \leq 9000$, a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.

2. Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estes passos é desvalorizada em 1 ponto.

3. Se for apresentado 2005 , a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

4. Se for representada graficamente a função G , a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.

2.1. .... **16 pontos**

Obter o valor referente à empresa A .... 9 pontos

Calcular o valor da parcela fixa $(4{,}008 \text{ euros})$ .... 4 pontos

Calcular o valor da parcela variável $(15{,}5675 \text{ euros})$ .... 4 pontos

Calcular o valor referente à empresa A $(19{,}58 \text{ euros})$ .... 1 ponto

Obter o valor referente à empresa B $(19{,}05 \text{ euros})$ .... 5 pontos

Concluir que o valor a pagar pelo consumo energético teria sido menor na empresa B .... 2 pontos

2.2. .... **16 pontos**

Escrever $f(x) = 0{,}0479x + 4{,}008$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Escrever $g(x) = 0{,}0586x$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Traduzir o problema por uma condição $(f(x) < g(x)$, ou equivalente) (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Resolver a condição anterior .... 7 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Obter $-0{,}0107x < -4{,}008$ .... 4 pontos

Obter $x > 374{,}5...$ .... 3 pontos

2.º Processo

Representar graficamente a função f (**ver nota 2**) .... 2 pontos

Representar graficamente a função g (**ver nota 2**) .... 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos .... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto $(374{,}5...)$ .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido (375 kWh) .... 1 ponto

Notas:

1. Se for apresentada $f(x) = g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) > g(x)$ ou $f(x) \geq g(x)$, a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.

2. Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estes passos é desvalorizada em 1 ponto.

3. .... **20 pontos**

Identificar a função objetivo $(L(x, y) = 3x + 4y)$ .... 2 pontos

Identificar as restrições
$(x \leq 2y$, $y \leq 2x$, $x + y \leq 9$, $x \geq 0$ e $y \geq 0)$ .... (5×1) .... 5 pontos

Representar graficamente a região admissível .... 7 pontos

Representar graficamente as retas de equações $x = 2y$, $y = 2x$ e
$x + y = 9$ .... 3 pontos

Assinalar o polígono .... 4 pontos

Obter as coordenadas dos vértices do polígono, exceto a origem
$((3, 6)$ e $(6, 3))$ .... (2×1) .... 2 pontos

Calcular o lucro correspondente a cada um dos vértices do polígono, exceto a origem
(ou implementar o método da paralela à reta de nível zero) (**ver nota**) .. (2×1) ... 2 pontos

Apresentar os valores pedidos
$(3$ quilogramas de cogumelos e 6 quilogramas de espargos$)$ .... 2 pontos

Nota – No caso de ser implementado o método da paralela à reta de nível zero, se apenas for representada, corretamente, esta reta, a pontuação a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

4.1. .... **16 pontos**

Equacionar o problema $(h(\alpha) = 25$ ou equivalente$)$ .... 4 pontos

Resolver a equação anterior .... 11 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Representar graficamente a função h (**ver notas 1 e 2**) .... 5 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = 25$ (**ver nota 1**) 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos .... 2 pontos

Obter a abcissa desse ponto .... 2 pontos

Notas:

1. Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estes passos é desvalorizada em 1 ponto.

2. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir a este passo é desvalorizada em 1 ponto.

2.º Processo

Isolar $\operatorname{sen}(\alpha)$ .... 3 pontos

Obter a amplitude do ângulo agudo que é solução da equação .... 4 pontos

Obter o valor de α .... 4 pontos

Apresentar o valor pedido (162°) .... 1 ponto

4.2. .... **20 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar α com 90^{o} .... 4 pontos

Obter $h(90)$ $(56{,}7)$ .... 2 pontos

Identificar α com 180^{o} .... 4 pontos

Obter $h(180)$ $(10{,}7)$ .... 2 pontos

Obter metade do comprimento do vão da ponte (46) .... 5 pontos

Obter o valor pedido $(92\ \mathrm{m})$ .... 3 pontos

2.º Processo

Representar graficamente a função h (**ver nota**) .... 6 pontos

Assinalar o ponto do gráfico cuja ordenada é o valor máximo dessa função .... 1 ponto

Obter a ordenada desse ponto $(56{,}7)$ .... 2 pontos

Assinalar o ponto do gráfico cuja ordenada é o valor mínimo dessa função .... 1 ponto

Obter a ordenada desse ponto $(10{,}7)$ .... 2 pontos

Obter metade do comprimento do vão da ponte (46) .... 5 pontos

Obter o valor pedido $(92\ \mathrm{m})$ .... 3 pontos

Nota – Se não for representado o referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.
Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 2 pontos.

4.3. .... **16 pontos**

Obter o valor de $T(135)$ $(-0{,}57)$ (**ver nota 1**) .... 6 pontos

Interpretar o valor obtido no contexto da situação (**ver nota 2**) .... 10 pontos

- Referir que a altura do ponto P está a diminuir .... 5 pontos
- Interpretar $-0{,}57$ como referente a $0{,}57\ \mathrm{m/grau}$ .... 4 pontos
- Referir que se trata de um valor aproximado da taxa de variação ... 1 ponto

Notas:

1. Se for obtido o valor $-32{,}53$ ou o valor $-45{,}82$, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 2 pontos.

2. Exemplo de interpretação: «Quando $\alpha = 135^{\mathrm{o}}$, a altura do ponto P em relação ao nível da superfície da água está a diminuir a uma taxa de, aproximadamente, $57\ \mathrm{cm}$ por grau».

5.1. .... **16 pontos**

Apresentar as listas introduzidas na calculadora .... 4 pontos

Apresentar o valor do declive e o valor da ordenada na origem da reta de regressão linear $(3{,}21$ e $-8{,}41$, respetivamente$)$ .... 6 pontos

Obter o valor pedido $(62$ pulsos$)$ .... 6 pontos

5.2.1. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Escrever a subtração entre u_{n+1} e u_n (ou equivalente) .... 5 pontos

Obter a expressão de u_{n+1} .... 5 pontos

Obter a diferença (6) .... 5 pontos

Referir que a diferença não depende de n (ou equivalente) .... 1 ponto

2.º Processo

Calcular o 1.º termo da sequência dada (42) .... 3 pontos

Calcular o 2.º termo da sequência dada (48) .... 3 pontos

Calcular a diferença desses termos (6) .... 2 pontos

Escrever $a_{15}+(n-15)r$ como termo geral de uma progressão aritmética (a_n) 4 pontos

Substituir a_{15} por 42 .... 1 ponto

Substituir r por 6 .... 1 ponto

Obter $6n-48$ .... 2 pontos

3.º Processo

Referir que $6n-48$ corresponde a uma expressão polinomial do 1.º grau .. 10 pontos

Referir que $\{15, 16, ..., 38\}$ é um conjunto de números naturais consecutivos (ou equivalente) .... 6 pontos

5.2.2. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que os números de pulsos feitos pelo grilo nas audições são termos consecutivos de (u_n) .... 2 pontos

Reconhecer que são 10 termos .... 2 pontos

Obter o primeiro desses termos (72) .... 4 pontos

Obter o último desses termos (126) .... 4 pontos

Apresentar uma expressão da soma dos dez termos $\left(\frac{72+126}{2}\times 10\right)$ .... 3 pontos

Obter o valor pedido $(990$ pulsos$)$ .... 1 ponto

2.º Processo

Calcular u_{20} , u_{21} , ..., u_{28} e u_{29} .... (10×1) .... 10 pontos

Identificar o valor pedido com a soma dos valores anteriores .... 5 pontos

Obter o valor pedido $(990$ pulsos$)$ .... 1 ponto

6. .... **16 pontos**

Obter o comprimento da aresta da caixa $(20\ \text{cm})$ .... 4 pontos

Calcular o volume da caixa $(8000\ \text{cm}^3)$ .... 2 pontos

Reconhecer que a bola tem $10\ \text{cm}$ de raio .... 4 pontos

Calcular o volume da bola $(4188{,}79020...\ \text{cm}^3)$ .... 2 pontos

Obter o valor pedido $(3811\ \text{cm}^3)$ .... 4 pontos

7. .... **16 pontos**

Considerar, relativamente à Figura 8, um triângulo retângulo cuja hipotenusa seja o raio da superfície esférica, e cujos catetos sejam o raio da abertura do vaso e a distância do centro dessa abertura ao centro da superfície esférica .... 4 pontos

Calcular a distância do centro da abertura do vaso ao centro da superfície esférica ... 3 pontos

Aplicar o Teorema de Pitágoras ao triângulo .... 2 pontos

Obter o raio da abertura do vaso (6) .... 3 pontos

Escrever uma expressão do perímetro da abertura do vaso .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $(37{,}7\ \text{cm})$ .... 2 pontos

8. .... **16 pontos**

Reconhecer que $P(X<50)=P(X>80)$ .... 2 pontos

Indicar o valor de $P(X<50)$ $(0{,}15)$ .... 2 pontos

Indicar o valor de $P(X>80)$ $(0{,}15)$ .... 2 pontos

Obter o número de batatas-sementes com massa menor do que $50\ \text{g}$ (300) .... 2 pontos

Obter o número de batatas-sementes com massa maior do que $80\ \text{g}$ (300) ..... 2 pontos

Obter o número de batatas-sementes com massa entre $50\ \text{g}$ e $80\ \text{g}$ (1400) .. 2 pontos

Escrever uma equação que permita obter m .... 3 pontos

Obter m $(1{,}1)$ .... 1 ponto

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 7 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.1.	2.2.	3.	4.2.	5.2.1.	7.	8.	Subtotal
Cotação (em pontos)	16	16	20	20	16	16	16	**120**
Destes 7 itens contribuem para a classificação final da prova os 5 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.2.**	**2.1.**	**4.1.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.2.**	**6.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	5 x 16 pontos							**80**
TOTAL								**200**