REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

✱ 1. Qual das expressões seguintes é termo geral de uma sucessão convergente?

(A) $(-1)^n \times n$ **(B)** $\dfrac{(-1)^n}{n}$ **(C)** $(-1)^n + n$ **(D)** $(-1)^n - n$

2. A soma dos cinco primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $\dfrac{2}{3}$ é 211 .

Determine o quinto termo desta progressão.

✱ 3. Seja Ω , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma dada experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(\overline{B}) = 0{,}6$;
- $P(A \cup B) = 0{,}6$;
- $A \cap B = \varnothing$.

Qual é o valor de $P(\overline{A})$?

(A) $0{,}2$ **(B)** $0{,}4$ **(C)** $0{,}6$ **(D)** $0{,}8$

✱ 4. O Semáforo é um jogo matemático em que se usa um tabuleiro retangular de 3×4 casas e se dispõe de peças verdes, peças amarelas e peças encarnadas. As peças da mesma cor são iguais.

Na Figura 1, está representado um tabuleiro do jogo Semáforo cujas casas foram numeradas de 1 a 12 .

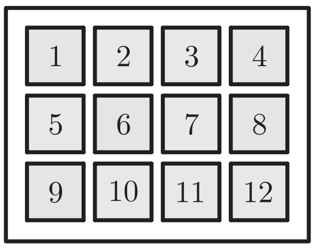

Figura 1

Pretende-se colocar 2 peças no tabuleiro, uma peça por casa, de modo a obter uma configuração colorida. Para o efeito, dispõe-se de várias peças de cada cor.

Considera-se uma configuração colorida o resultado da colocação de duas peças no tabuleiro. Duas configurações coloridas são diferentes se diferirem nas casas ocupadas pelas peças usadas ou na cor dessas peças.

A expressão seguinte permite determinar o número de configurações coloridas diferentes que é possível obter.

$$3 \times {}^{12}C_2 \; + \; {}^{3}C_2 \times {}^{12}A_2$$

Explique, no contexto descrito, cada parcela desta expressão.

5. Dos alunos que participaram num torneio de jogos matemáticos, que incluiu os jogos Semáforo e Rastros, sabe-se que:

- metade dos alunos jogou Semáforo;
- um quarto dos alunos não jogou Rastros;
- um quinto dos alunos que não jogaram Rastros jogou Semáforo.

Determine a probabilidade de um aluno que participou no torneio, escolhido ao acaso, não ter jogado Semáforo e ter jogado Rastros.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

6. Na Figura 2, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone reto de vértice V e base de centro no ponto A .

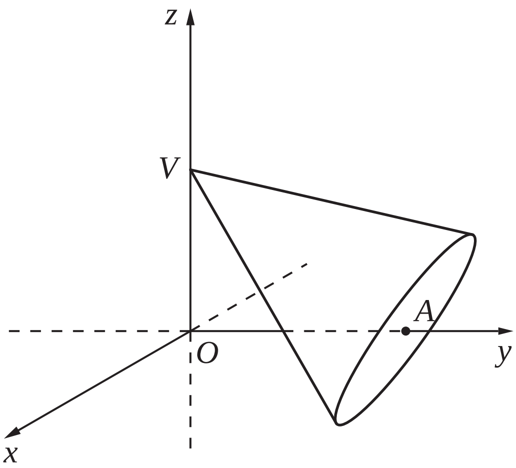

Figura 2

Sabe-se que:

- o ponto V pertence ao eixo Oz , e o ponto A pertence ao eixo Oy ;
- a base do cone tem raio 3 e está contida no plano definido por $4y - 3z = 16$.

* **6.1.** Qual das seguintes equações define um plano perpendicular ao plano que contém a base do cone e que passa no ponto de coordenadas $(1, 2, -1)$?

(A) $4y - 3z = 11$ **(B)** $3x + 4y + z = 10$

(C) $3y + 4z = 8$ **(D)** $x + 3y + 4z = 3$

* **6.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine o volume do cone.

7. Na Figura 3, está representada, em referencial o.n. Oxy , a circunferência de equação $(x+2)^2+(y-1)^2=9$.

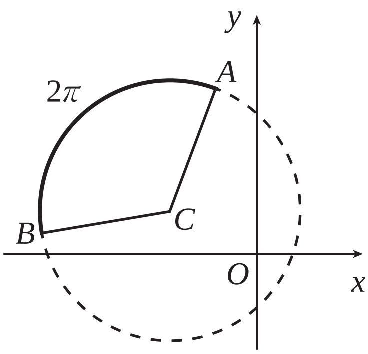

Figura 3

O ponto C é o centro da circunferência.

A e B são dois pontos da circunferência.

O arco de circunferência AB tem comprimento 2π .

Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

8. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{2-x}}{x+2} & \text{se} \quad x<-2 \vee x \geq 2 \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{x^2-4} & \text{se} \quad -2<x<2 \end{cases}$$

Resolva os itens **8.1.** e **8.2.** sem recorrer à calculadora.

* **8.1.** Averigue se a função f é contínua em $x=2$.

* **8.2.** Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no intervalo $]-\infty,-2[$, e determine esses extremos, caso existam.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

9. Na Figura 4, está representado um cabo suspenso pelas suas extremidades em dois postes iguais, distanciados 10 metros entre si. Os postes estão instalados perpendicularmente ao solo, num terreno plano e horizontal. O ponto do cabo mais próximo do solo é equidistante dos dois postes.

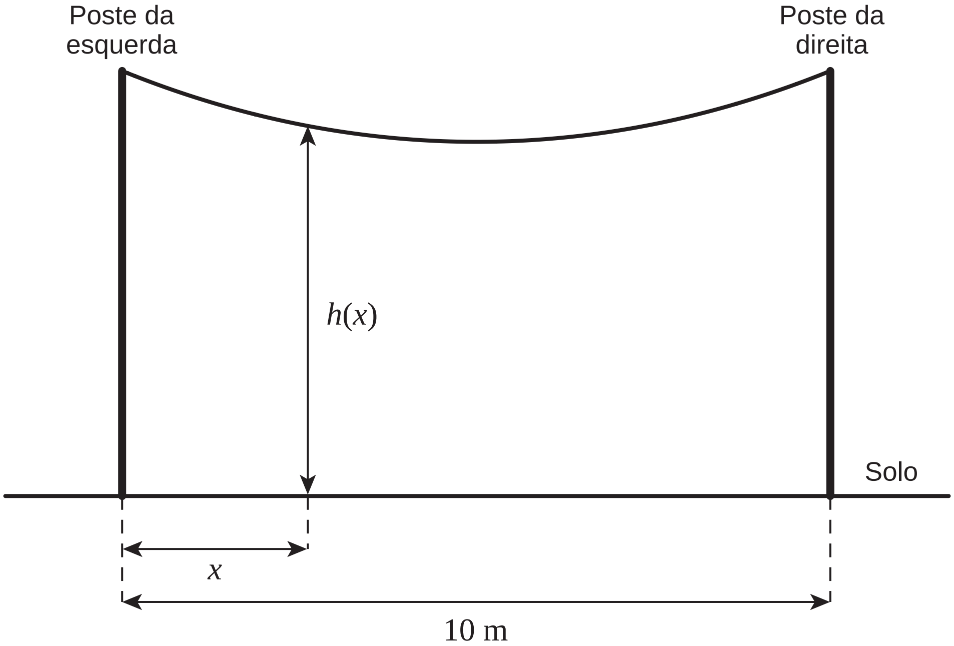

Figura 4

Seja h a função, de domínio $[0, 10]$, definida por $h(x) = 6{,}3\left(e^{\frac{x-5}{12{,}6}} + e^{\frac{5-x}{12{,}6}}\right) - 7{,}6$.

Admita que $h(x)$ é a altura, relativamente ao solo, em metros, de um ponto do cabo situado a x metros do poste da esquerda.

*** 9.1.** Qual é a distância, arredondada às décimas de metro, da base do poste da esquerda ao ponto do cabo que está mais próximo do solo?

(A) $7{,}1$ m **(B)** $7{,}3$ m **(C)** $7{,}6$ m **(D)** $7{,}8$ m

*** 9.2.** Para um ponto do cabo situado a d metros do poste da esquerda, verifica-se que, diminuindo 50% essa distância, a altura, relativamente ao solo, diminui 30 centímetros.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor de d , sabendo-se que este valor existe e é único.

Apresente o resultado arredondado às décimas de metro.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às centésimas.

*** 10.** Na Figura 5, estão representados, no plano complexo, os afixos de cinco números complexos.

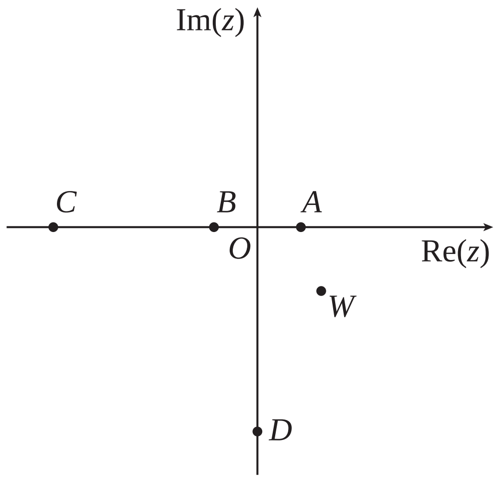

Figura 5

O ponto A pertence ao semieixo real positivo, os pontos B e C pertencem ao semieixo real negativo, e o ponto D pertence ao semieixo imaginário negativo.

O ponto W é o afixo de um número complexo w tal que $\operatorname{Im}(w) = -\operatorname{Re}(w)$ e $\operatorname{Re}(w) > 1$.

Qual dos pontos seguintes pode ser o afixo do número complexo $-iw^2$?

(A) Ponto A

(B) Ponto B

(C) Ponto C

(D) Ponto D

11. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a equação $z^3 = \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}\,i}\right)^6$.

Determine o número complexo que é solução da equação e cujo afixo, no plano complexo, pertence ao terceiro quadrante.

Apresente o resultado na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

*** 12.** Na Figura 6, está representado o triângulo $[ABC]$.

Seja $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ a amplitude, em radianos, do ângulo BAC .

Sabe-se que:

- $C\hat{B}A = 2x$;
- $\overline{BC} = 2 \text{ cm}$.

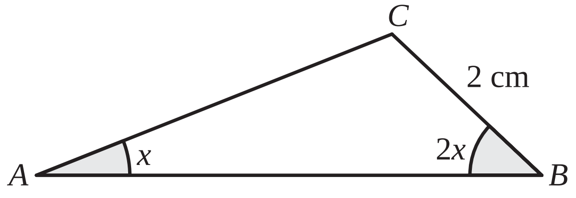

Figura 6

Mostre que o comprimento de $[AB]$, em centímetros, é dado, para cada valor de x , pela expressão

$$8\cos^2 x - 2$$

13. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja g a função, de domínio $]1, +\infty[$, definida por $g(x) = 5x - 3\ln(x-1)$.

Estude a função g quanto à existência de assíntotas verticais e de assíntotas oblíquas ao seu gráfico e, caso existam, escreva as respetivas equações.

14. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine os números reais que são solução da equação

$$(e^x - 1)\ln(5 - 2x) + e^x \ln(3 - x) = \ln(3 - x)$$

* **15.** Seja k um número real não nulo, e seja f a função definida, em $\mathbb{R}^+$, por $f(x) = \dfrac{k}{x}$.

Considere dois pontos do gráfico de f, A e B, sendo A o de menor abcissa. Considere, também, o ponto desse gráfico em que a reta tangente ao gráfico é paralela à reta AB .

Mostre que, para qualquer valor de k , as abcissas dos três pontos são termos consecutivos de uma progressão geométrica.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**3.**	**4.**	**6.1.**	**6.2.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	**12.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	12	14	12	14	14	14	12	14	12	14	14	**158**

Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**5.**	**7.**	**11.**	**13.**	**14.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos						**42**
TOTAL							**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Critérios de Classificação

10 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

2. .... **14 pontos**

Nota prévia – Se for considerada uma progressão aritmética, em vez de uma progressão geométrica, a classificação a atribuir à resposta é 0 pontos.

Designemos por (u_n) a progressão geométrica.

Escrever $u_1 \times \dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1-\frac{2}{3}}$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Escrever $u_1 \times \dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1-\frac{2}{3}} = 211$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $u_1 = 81$ .... 3 pontos

Escrever $u_5 = 81 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Obter o valor pedido (16) .... 2 pontos

3. .... **12 pontos**

Opção **(D)**

4. .... **14 pontos**

Tópicos de resposta

- Explicação da parcela $3 \times {}^{12}C_2$: é o número de maneiras de escolher uma das três cores e, para cada cor escolhida, colocar duas peças dessa cor em duas casas do tabuleiro.
- Explicação da parcela ${}^{3}C_2 \times {}^{12}A_2$: é o número de maneiras de escolher duas das três cores e, para cada par de cores escolhidas, colocar duas peças, uma de cada cor desse par, em duas casas do tabuleiro.

Níveis	Descritores de desempenho	Pontuação
5	Explica as duas parcelas, utilizando adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	14
4	Explica as duas parcelas, com falhas na utilização do vocabulário específico da Matemática.	13
3	Explica apenas uma parcela, utilizando adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	7
2	Explica apenas uma parcela, com falhas na utilização do vocabulário específico da Matemática.	6
1	Refere apenas o significado da expressão.	3

5. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

Designemos por S o acontecimento «o aluno jogou Semáforo» e por R o acontecimento «o aluno jogou Rastros».

1.º Processo

Escrever $P(S)=\frac{1}{2}$ .... 1 ponto

Escrever $P(\overline{R})=\frac{1}{4}$ .... 1 ponto

Escrever $P(S\mid\overline{R})=\frac{1}{5}$ .... 2 pontos

Identificar o valor pedido com $P(\overline{S}\cap R)$ .... 1 ponto

Obter $P(S\cap\overline{R})$ $\left(\frac{1}{20}\right)$ .... 3 pontos

Obter $P(S\cap R)$ $\left(\frac{9}{20}\right)$ .... 2 pontos

Obter $P(R)$ $\left(\frac{3}{4}\right)$ .... 1 ponto

Obter o valor pedido $\left(\frac{3}{10}\right)$ .... 3 pontos

2.º Processo

Construir uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam: S e $\overline{S}$; R e $\overline{R}$ .. 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(S)$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(\overline{S})$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(\overline{R})$ $\left(\frac{1}{4}\right)$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(S\cap\overline{R})$ $\left(\frac{1}{20}\right)$ .... 4 pontos

Preencher a célula da tabela relativa a $P(\overline{S}\cap\overline{R})$ $\left(\frac{1}{5}\right)$ .... 2 pontos

Identificar o valor pedido com $P(\overline{S}\cap R)$ .... 1 ponto

Obter o valor pedido $\left(\frac{3}{10}\right)$ .... 3 pontos

6.1. .... **12 pontos**

Opção **(D)**

6.2. .... **14 pontos**

Reconhecer que o ponto A tem abcissa e cota nulas .... 1 ponto

Determinar a ordenada do ponto A .... 2 pontos

Reconhecer que $[AV]$ é a altura do cone .... 1 ponto

Definir algebricamente a reta AV .... 3 pontos

Reconhecer que o ponto V tem abcissa e ordenada nulas .... 1 ponto

Determinar a cota do ponto V .... 2 pontos

Determinar $\overline{AV}$ .... 2 pontos

Obter o valor pedido (15π) .... 2 pontos

7. .... **14 pontos**

Reconhecer que $\|\overrightarrow{CA}\| = \|\overrightarrow{CB}\| = 3$ .... 3 pontos

Determinar a amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ .... 4 pontos

Escrever $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \times \cos\left(\overrightarrow{CA}\hat{\ }\overrightarrow{CB}\right)$ .... 3 pontos

Calcular o valor do produto escalar $\left(-\frac{9}{2}\right)$ .... 4 pontos

8.1. .... **14 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{e^{2-x}}{x+2}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \frac{1}{4}$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ .... 10 pontos

Reconhecer que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x^2-4}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{(x-2)(x+2)}$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{(x-2)(x+2)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2} \times \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x+2}$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2} \times \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x+2} \underset{y=x-2}{=} \lim\limits_{y \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \times \frac{1}{4}$.. 3 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \frac{1}{4}$ .... 2 pontos

Referir que $f(2) = \frac{1}{4}$ .... 1 ponto

Concluir que a função f é contínua em $x = 2$ .... 1 ponto

8.2. .... **14 pontos**

Determinar $f'(x)$ em $]-\infty, -2[$ (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Escrever $f'(x)=0$ .... 1 ponto

Determinar o zero de f' em $]-\infty, -2[$ .... 2 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f em $]-\infty, -2[$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Apresentar os intervalos de monotonia de f em $]-\infty, -2[$ (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Reconhecer que o extremo relativo é $f(-3)$ .... 1 ponto

Determinar $f(-3)$ $(-e^5)$ .... 1 ponto

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
2. Se for referido que a função f é crescente em $]-\infty, -3[$, em vez de $]-\infty, -3]$, e decrescente em $]-3, -2[$, em vez de $[-3, -2[$, esta etapa deve ser considerada cumprida.

9.1. .... **12 pontos**

Opção **(A)**

9.2. .... **14 pontos**

Apresentar a equação $h\left(\frac{d}{2}\right)=h(d)-0{,}3$ (ou uma equação equivalente) (**ver notas 1 e 2**) .... 7 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 3**) .... 4 pontos

Apresentar a abcissa do ponto relevante .... 2 pontos

Apresentar o valor de d na forma pedida $(7{,}9\ \text{m})$ .... 1 ponto

Notas:

1. Se a equação apresentada não traduzir corretamente o problema, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, desde que seja inequívoco que correspondem à resolução da equação que traduz corretamente o problema.
3. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

10. .... **12 pontos**

Opção **(C)**

11. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar $\left|-\sqrt{3}+i\right|$ .... 1 ponto

Determinar um argumento de $-\sqrt{3}+i$ .... 1 ponto

Escrever $-\sqrt{3}+i$ na forma trigonométrica .... 1 ponto

Escrever $\sqrt{2}\,i$ na forma trigonométrica .... 2 pontos

Obter $\dfrac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}\,i}=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ .... 2 pontos

Obter $z^3=8$ .... 2 pontos

Obter $z=2e^{ik\frac{2\pi}{3}},\quad k\in\{0,1,2\}$ .... 2 pontos

Obter $2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ .... 1 ponto

Obter o número complexo na forma pedida $(-1-\sqrt{3}\,i)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $\dfrac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}\,i}=\dfrac{(-\sqrt{3}+i)(-\sqrt{2}\,i)}{(\sqrt{2}\,i)(-\sqrt{2}\,i)}$ .... 2 pontos

Obter $z^3=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i\right)^6$ .... 2 pontos

Determinar $\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i\right|$ .... 1 ponto

Determinar um argumento de $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$ .... 1 ponto

Escrever $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$ na forma trigonométrica .... 1 ponto

Obter $z^3=8$ .... 2 pontos

Obter $z=2e^{ik\frac{2\pi}{3}},\quad k\in\{0,1,2\}$ .... 2 pontos

Obter $2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ .... 1 ponto

Obter o número complexo na forma pedida $(-1-\sqrt{3}\,i)$ .... 2 pontos

12. .... **14 pontos**

Seja P o pé da perpendicular tirada de C para $[AB]$.

Obter $\overline{PB}$ em função de x .... 3 pontos

Obter $\overline{CP}$ em função de x .... 3 pontos

Obter $\overline{AP}$ em função de x .... 3 pontos

Obter $\overline{AB}$ em função de x .... 1 ponto

Obter $8\cos^2 x-2$ .... 4 pontos

13. .... **14 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ .... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(5x - 3\ln(x-1)\right)$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = +\infty$ .... 2 pontos

Concluir que a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico da função g ... 1 ponto

Justificar a inexistência de outras assíntotas verticais ao gráfico da função g ... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ .... 5 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x - 3\ln(x-1)}{x}$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3\ln(x-1)}{x}$ .... 3 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 5$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x) - 5x\right)$ .... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5x - 3\ln(x-1) - 5x\right)$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x) - 5x\right) = -\infty$ .... 2 pontos

Concluir que não existe assíntota oblíqua ao gráfico da função g .... 1 ponto

14. .... **14 pontos**

Determinar o domínio da condição .... 2 pontos

Obter $\left(e^x - 1\right)\ln(5 - 2x) + \left(e^x - 1\right)\ln(3 - x) = 0$ .... 2 pontos

Obter $\left(e^x - 1\right)\ln\left((5 - 2x)(3 - x)\right) = 0$ .... 4 pontos

Obter $e^x - 1 = 0 \ \vee \ (5 - 2x)(3 - x) = 1$ .... 2 pontos

Resolver a condição $e^x - 1 = 0 \ \vee \ (5 - 2x)(3 - x) = 1$ .... 2 pontos

Apresentar os valores pedidos (0 e 2) .... 2 pontos

15. .... **14 pontos**

Designemos por a a abcissa do ponto A e por b a abcissa do ponto B, com $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $a < b$.

Determinar $f'(x)$ .... 1 ponto

Escrever as coordenadas de A em função de a .... 1 ponto

Escrever as coordenadas de B em função de b .... 1 ponto

Obter o declive da reta AB em função de a e de b .... 2 pontos

Escrever $f'(x) = -\frac{k}{ab}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $x = \sqrt{ab}$ .... 2 pontos

Reconhecer que $a < \sqrt{ab} < b$ .... 1 ponto

Mostrar que $\frac{b}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{a}$ .... 3 pontos

Concluir o pretendido .... 1 ponto

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.</td><td>3.</td><td>4.</td><td>6.1.</td><td>6.2.</td><td>8.1.</td><td>8.2.</td><td>9.1.</td><td>9.2.</td><td>10.</td><td>12.</td><td>15.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>158</td></tr>
<tr><td>Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">2.</td><td colspan="2">5.</td><td colspan="2">7.</td><td colspan="2">11.</td><td colspan="2">13.</td><td colspan="2">14.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="12">3 × 14 pontos</td><td>42</td></tr>
<tr><td colspan="13">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>