Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 7 Páginas

---

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \, \cos b + \operatorname{sen} b \, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \, \cos b - \operatorname{sen} a \, \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho \, e^{i\theta})^n = \rho^n \, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} \; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \, e^u$

$(a^u)' = u' \, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

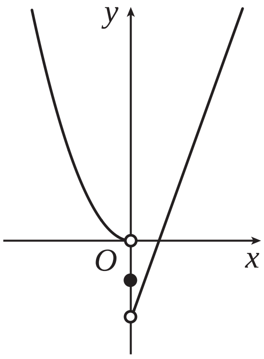
$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

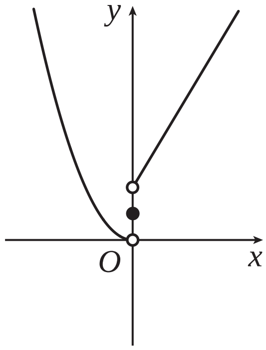
$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

✱ **1.** Em qual das opções seguintes está representada graficamente, em referencial o.n. Oxy, uma função que tem um mínimo em $x = 0$?

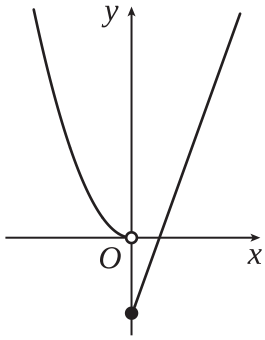
(A)



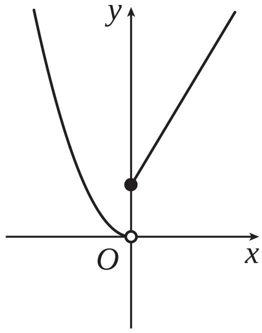
(B)



(C)



(D)



✱ **2.** A soma de todos os elementos de uma dada linha do triângulo de Pascal é igual a $16\,384$.

Qual é o valor do quarto elemento da linha seguinte?

(A) 286 **(B)** 455 **(C)** 715 **(D)** 1365

✱ **3.** Dos passageiros de um voo de avião do Porto para Faro sabe-se que, antes do embarque:

- 70% nunca tinham viajado de avião;
- $\frac{2}{5}$ já tinham estado em Faro;
- metade dos que já tinham estado em Faro já tinha viajado de avião.

Admita que a ordem de saída dos passageiros deste voo é aleatória.

O primeiro passageiro a sair do avião nunca tinha estado em Faro.

Qual é a probabilidade de esta ter sido a primeira viagem de avião desse passageiro?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

4. Um saco contém 12 cartões com a forma de retângulos geometricamente iguais: 3 azuis, 2 brancos, 3 pretos e 4 vermelhos.

Os 12 cartões vão ser retirados, sucessivamente e ao acaso, do saco e dispostos sobre uma mesa, alinhados pela ordem em que são retirados.

Determine a probabilidade de os cartões azuis ficarem todos juntos.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

5. Na Figura 1, está representado o cubo $[ABCDEFGH]$.

Fixado um determinado referencial o.n. $Oxyz$, tem-se:

$A(-2, 5, 0)$, $B(1, -1, 2)$ e $C(3, 2, 8)$.

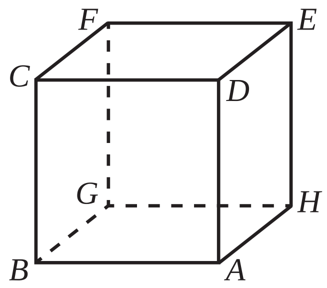


Figura 1

*** 5.1.** Qual é o valor de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HE}$?

(A) -49 **(B)** 0

(C) 7 **(D)** 49

*** 5.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Sabe-se que o vértice E do cubo pertence à reta definida pela equação

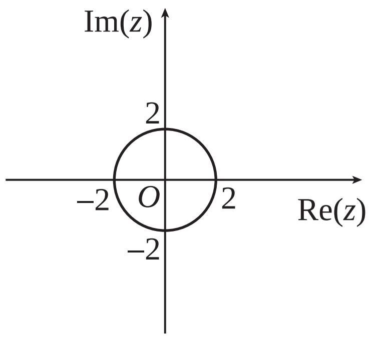
$$(x, y, z) = (0, 0, 3) + k(1, -1, -1), \quad k \in \mathbb{R}$$

Determine as coordenadas do vértice E.

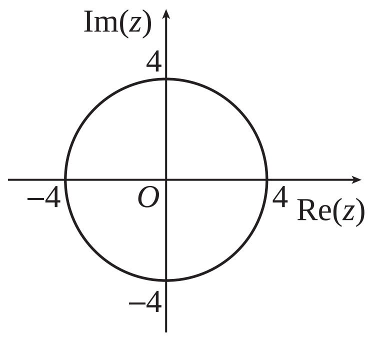
*** 6.** Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $z \times \overline{z} = 4$.

Em qual das opções seguintes está representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

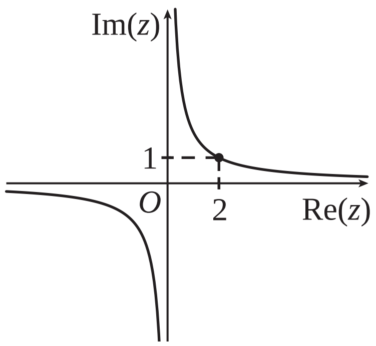
(A)



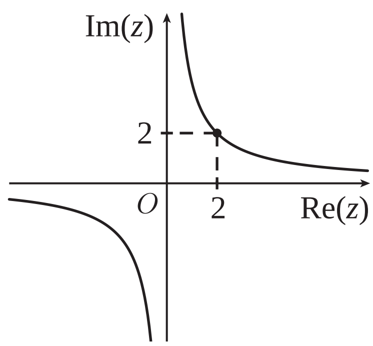
(B)



(C)



(D)



7. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número complexo $z = \dfrac{4}{1-i} + 4i^{18}$.

O número complexo z é uma das raízes cúbicas de um número complexo w .

Determine as restantes raízes cúbicas de w e apresente-as na forma trigonométrica.

*** 8.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \ln\sqrt{e+x} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Averigue se a função f é contínua em $x = 0$.

9. Seja g uma função derivável, de domínio $]-\infty, \pi[\setminus \{0\}$, cuja derivada, g' , é dada por

$$g'(x) = \begin{cases} 3e^{2x} - 7e^{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ x + 2\cos^2 x & \text{se} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

Resolva os itens **9.1.** e **9.2.** sem recorrer à calculadora.

*** 9.1.** Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $]0, \pi[$.

Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g .

*** 9.2.** Considere, em referencial o.n. Oxy , o gráfico da função g .

Determine, no intervalo $]-\infty, 0[$, a abcissa do ponto do gráfico da função g em que a reta tangente ao gráfico da função é paralela à reta de equação $y = -2x$.

10. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja h a função, de domínio $]0, +\infty[$, definida por $h(x) = \dfrac{e^x + \ln x}{e^x - 1}$.

Estude a função h quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

11. Um tanque, que inicialmente tinha um certo volume de água salgada, dispõe de duas torneiras, uma de enchimento e outra de vazamento. As duas torneiras são abertas, em simultâneo, sendo vertida água do mar para o tanque até este estar cheio.

Admita que a massa de sal, m , em quilogramas, no tanque, t minutos após a abertura das torneiras, até o tanque estar cheio, é dada por

$$m(t) = \frac{30(1 + 0{,}006t)^3 - 29}{(1 + 0{,}006t)^2} \quad , \quad \text{com } t \in [0, 250]$$

*** 11.1.** Qual é, com aproximação às unidades, a percentagem de aumento da massa de sal no tanque, no primeiro minuto após a abertura das torneiras?

(A) 152% **(B)** 52% **(C)** 250% **(D)** 25%

*** 11.2.** Existe um instante a partir do qual, passada meia hora, a massa de sal no tanque triplica.

Determine, recorrendo à calculadora, esse instante, sabendo-se que existe e é único.

Apresente o resultado em minutos e segundos (com os segundos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às centésimas.

12. Seja (u_n) a sucessão definida por

$$u_n = \begin{cases} (-1)^n & \text{se} \quad n \leq 3 \\ \dfrac{4n-1}{n+3} & \text{se} \quad n > 3 \end{cases}$$

Mostre que a sucessão (u_n) é limitada.

13. Seja a um número real.

Considere a função polinomial definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + a^2x + \sqrt{2}$.

Mostre que, para qualquer valor de a , a função não tem extremos.

14. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Na Figura 2, estão representadas, em referencial o.n. Oxy , as retas r e s .

A reta r é definida pela equação $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1$.

A reta s passa pela origem do referencial e tem inclinação α .

O ponto A é o ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox .

O ponto B é o ponto de intersecção das duas retas.

Sabe-se que $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Determine a área do triângulo $[AOB]$.

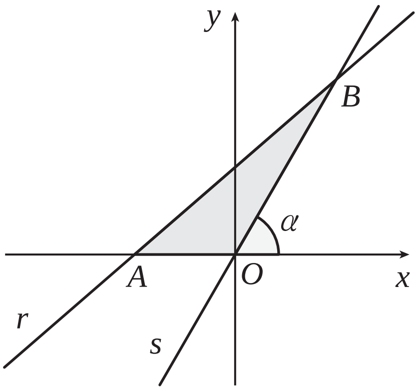


Figura 2

* **15.** Considere, num referencial o.n. Oxy , o gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, e uma reta r , não vertical, que passa no ponto de coordenadas $(0, 1)$.

Sejam A e B os pontos de intersecção da reta r com o gráfico da função f .

Mostre que o ângulo convexo AOB é um ângulo reto.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.</td><td>2.</td><td>3.</td><td>5.1.</td><td>5.2.</td><td>6.</td><td>8.</td><td>9.1.</td><td>9.2.</td><td>11.1.</td><td>11.2.</td><td>15.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>158</td></tr>
<tr><td>Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">4.</td><td colspan="2">7.</td><td colspan="2">10.</td><td colspan="2">12.</td><td colspan="2">13.</td><td colspan="2">14.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="12">3 × 14 pontos</td><td>42</td></tr>
<tr><td colspan="13">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>

Prova 635

2.ª Fase

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Critérios de Classificação 13 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **12 pontos**

Opção **(C)**

2. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

3. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

Designemos por A o acontecimento «o passageiro já tinha viajado de avião» e por F o acontecimento «o passageiro já tinha estado em Faro».

1.º Processo

Escrever $P(\overline{A}) = 0{,}7$ .... 1 ponto

Escrever $P(F) = \frac{2}{5}$ .... 1 ponto

Escrever $P(A \mid F) = \frac{1}{2}$ .... 1 ponto

Identificar o valor pedido com $P(\overline{A} \mid \overline{F})$ .... 1 ponto

Obter $P(A \cap F)$ $\left(\frac{1}{5}\right)$ .... 2 pontos

Escrever $P(\overline{A} \cap \overline{F}) = 1 - P(A \cup F)$ .... 2 pontos

Obter $P(A \cup F)$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 2 pontos

Obter $P(\overline{A} \cap \overline{F})$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

Obter $P(\overline{F})$ $\left(\frac{3}{5}\right)$ .... 1 ponto

Obter o valor pedido $\left(\frac{5}{6}\right)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Construir uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam: A e $\overline{A}$; F e $\overline{F}$ .. 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(\overline{A})$ $(0{,}7)$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(F)$ $\left(\frac{2}{5}\right)$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(\overline{F})$ $\left(\frac{3}{5}\right)$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(A \cap F)$ $\left(\frac{1}{5}\right)$ .... 3 pontos

Preencher a célula da tabela relativa a $P(\overline{A} \cap F)$ $\left(\frac{1}{5}\right)$ .... 2 pontos

Preencher a célula da tabela relativa a $P(\overline{A} \cap \overline{F})$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 2 pontos

Identificar o valor pedido com $P(\overline{A} \mid \overline{F})$ .... 1 ponto

Obter o valor pedido $\left(\frac{5}{6}\right)$ .... 2 pontos

4. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Apresentar uma expressão correspondente ao número de casos possíveis $\left({}^{12}C_3 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_3\right)$ (**ver nota 1**) .... 5 pontos

Apresentar uma expressão correspondente ao número de casos favoráveis $\left(10 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_3\right)$ (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Aplicar a regra de Laplace (**ver nota 3**) .... 2 pontos

Obter o valor pedido $\left(\frac{1}{22}\right)$ (**ver notas 3 e 4**) .... 2 pontos

2.º Processo

Apresentar uma expressão correspondente ao número de casos possíveis $\left({}^{12}A_3 \times {}^{9}A_2 \times {}^{7}A_3 \times 4!\right)$ (**ver nota 1**) .... 5 pontos

Apresentar uma expressão correspondente ao número de casos favoráveis $\left(10 \times 3! \times {}^{9}A_2 \times {}^{7}A_3 \times 4!\right)$ (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Aplicar a regra de Laplace (**ver nota 3**) .... 2 pontos

Obter o valor pedido $\left(\frac{1}{22}\right)$ (**ver notas 3 e 4**) .... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{12}C_3 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_3$ (1.º processo) ou a ${}^{12}A_3 \times {}^{9}A_2 \times {}^{7}A_3 \times 4!$ (2.º processo), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada não for equivalente a $10 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_3$ (1.º processo) ou a $10 \times 3! \times {}^{9}A_2 \times {}^{7}A_3 \times 4!$ (2.º processo), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
3. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
4. Se o valor obtido não pertencer ao intervalo $[0, 1]$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

5.1. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

5.2. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que $\overrightarrow{AB}$ é um vetor normal ao plano ADE .... 1 ponto

Determinar as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ .... 1 ponto

Obter uma equação cartesiana do plano ADE .... 5 pontos

- Escrever $3x - 6y + 2z + d = 0$ .... 2 pontos
- Escrever $3 \times (-2) - 6 \times 5 + 2 \times 0 + d = 0$ .... 2 pontos
- Obter o valor de d .... 1 ponto

Identificar as coordenadas do vértice E com $(k, -k, 3-k)$ .... 3 pontos

Escrever $3 \times k - 6 \times (-k) + 2 \times (3-k) + 36 = 0$ .... 2 pontos

Obter o valor de k .... 1 ponto

Escrever as coordenadas do vértice E $((-6, 6, 9))$ .... 1 ponto

2.º Processo

Determinar as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ .... 1 ponto

Identificar as coordenadas do vértice E com $(k, -k, 3-k)$ .... 3 pontos

Determinar as coordenadas de $\overrightarrow{AE}$ em função de k .... 2 pontos

Escrever $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$ .... 4 pontos

Obter o valor de k .... 3 pontos

Escrever as coordenadas do vértice E $((-6, 6, 9))$ .... 1 ponto

6. .... **12 pontos**

Opção **(A)**

7. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar i^{18} com -1 .... 2 pontos

Substituir $\frac{4}{1-i}$ por $\frac{4(1+i)}{(1-i)(1+i)}$ .... 2 pontos

Obter $z=-2+2i$ .... 2 pontos

Obter z na forma trigonométrica $\left(2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)$ .... 2 pontos

- Obter $|z|$ .... 1 ponto
- Obter um argumento de z .... 1 ponto

Reconhecer que as restantes raízes cúbicas de w são

$2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\ k\in\{1,2\}$ .... 4 pontos

Obter os números pedidos $\left(2\sqrt{2}\,e^{i\frac{17\pi}{12}}\right.$ e $\left.2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}\right)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Identificar i^{18} com -1 .... 2 pontos

Substituir $\frac{4}{1-i}$ por $\frac{4(1+i)}{(1-i)(1+i)}$ .... 2 pontos

Obter $z=-2+2i$ .... 2 pontos

Obter z na forma trigonométrica $\left(2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)$ .... 2 pontos

- Obter $|z|$ .... 1 ponto
- Obter um argumento de z .... 1 ponto

Reconhecer que $w=z^3$ .... 1 ponto

Determinar w .... 1 ponto

Reconhecer que as raízes cúbicas de w são

$2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\ k\in\{0,1,2\}$ .... 2 pontos

Obter os números pedidos $\left(2\sqrt{2}\,e^{i\frac{17\pi}{12}}\right.$ e $\left.2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}\right)$ .... 2 pontos

8. .... **14 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ .... 9 pontos

Reconhecer que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-\cos x}{x}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$ ...... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \times \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$ ... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ .... 2 pontos

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ou $f(0)$ .... 4 pontos

Concluir que a função f não é contínua em $x=0$ .... 1 ponto

9.1. .... **14 pontos**

Determinar $g''(x)$ em $]0, \pi[$ (**ver nota 1**) .... 3 pontos

Escrever $g''(x) = 0$ .... 1 ponto

Determinar os zeros de $g''(x)$ em $]0, \pi[$ .... 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal de g'' e de sentido das concavidades do gráfico de g em $]0, \pi[$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Apresentar os intervalos em que a concavidade do gráfico da função é voltada para cima e em que é voltada para baixo, em $]0, \pi[$ (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Indicar as abcissas dos pontos de inflexão $\left(\dfrac{\pi}{12}\right.$ e $\left.\dfrac{5\pi}{12}\right)$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a segunda derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
2. Se for referido que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left]0, \dfrac{\pi}{12}\right[$ e $\left]\dfrac{5\pi}{12}, \pi\right[$, em vez de $\left]0, \dfrac{\pi}{12}\right]$ e $\left[\dfrac{5\pi}{12}, \pi\right[$, e voltada para baixo em $\left]\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}\right[$, em vez de $\left[\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}\right]$, esta etapa deve ser considerada cumprida.

9.2. .... **14 pontos**

Reconhecer que o declive da reta tangente é igual a -2 .... 2 pontos

Escrever $g'(x) = -2$ .... 2 pontos

Escrever $3e^{2x} - 7e^{x} = -2$ .... 1 ponto

Escrever $3e^{2x} - 7e^{x} + 2 = 0$ .... 1 ponto

Obter $e^{x} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6}$ .... 3 pontos

Obter $e^{x} = \frac{1}{3} \vee e^{x} = 2$ .... 1 ponto

Obter $x = \ln\frac{1}{3} \vee x = \ln 2$ .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $\left(\ln\frac{1}{3}\right.$ ou $\left.-\ln 3\right)$ .... 2 pontos

10. .... **14 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x \to 0^{+}} h(x)$ .... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \frac{e^{x} + \ln x}{e^{x} - 1}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 0^{+}} h(x) = -\infty$ .... 2 pontos

Concluir que a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico da função h .... 1 ponto

Justificar a inexistência de outras assíntotas verticais ao gráfico da função h ... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ .... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x} + \ln x}{e^{x} - 1}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{\ln x}{e^{x}}}{1 - \frac{1}{e^{x}}}$ .... 2 pontos

Escrever $\frac{1 + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^{x}}}{1 - \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x}}}$ .... 1 ponto

Escrever $\frac{1 + \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}}{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x}}}{1 - 0}$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$ .... 2 pontos

Concluir que a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico da função h .... 1 ponto

11.1. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

11.2. .... **14 pontos**

Apresentar a equação $m(t+30)=3m(t)$
(ou uma equação equivalente) (**ver notas 1 e 2**) .... 6 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 3**) .... 4 pontos

Apresentar a abcissa do ponto relevante .... 2 pontos

Apresentar o valor de t na forma pedida $(10\,\text{min}\ 21\,\text{s})$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se a equação apresentada não traduzir corretamente o problema, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, desde que seja inequívoco que correspondem à resolução da equação que traduz corretamente o problema.

3. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

12. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Obter $\dfrac{4n-1}{n+3}=4-\dfrac{13}{n+3}$ .... 2 pontos

Obter $0<\dfrac{13}{n+3}\leq\dfrac{13}{7}$, para $n\geq 4$ .... 2 pontos

Obter $\dfrac{15}{7}\leq 4-\dfrac{13}{n+3}<4$, para $n\geq 4$ .... 5 pontos

Obter $-1\leq u_n<4$, para qualquer $n\in\mathbb{N}$ .... 4 pontos

Concluir que (u_n) é limitada .... 1 ponto

2.º Processo

Mostrar que (u_n) é minorada .... 6 pontos

Indicar um minorante, m .... 1 ponto

Justificar que $u_n\geq m$, para qualquer $n\in\mathbb{N}$ .... 5 pontos

Mostrar que (u_n) é majorada .... 7 pontos

Indicar um majorante, M .... 1 ponto

Justificar que $u_n\leq M$, para qualquer $n\in\mathbb{N}$ .... 6 pontos

Concluir que (u_n) é limitada .... 1 ponto

3.º Processo

Referir que uma sucessão convergente é limitada .... 6 pontos

Calcular $\lim u_n$ .... 6 pontos

Escrever $\lim u_n = \lim \frac{4n-1}{n+3}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim \frac{4n-1}{n+3} = \lim \frac{4-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter $\lim u_n = 4$ .... 2 pontos

Referir que (u_n) é convergente .... 1 ponto

Concluir que (u_n) é limitada .... 1 ponto

13. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) .... 3 pontos

Escrever $f'(x)=0$ .... 1 ponto

Determinar o zero de f' .... 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f (ou equivalente) .. 4 pontos

Referir que f é crescente .... 1 ponto

Concluir que f não tem extremos .... 2 pontos

2.º Processo

Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) .... 3 pontos

Escrever $f'(x)=0$ .... 1 ponto

Determinar o binómio discriminante da equação $f'(x)=0$ .... 2 pontos

Referir que f' tem apenas um zero .... 1 ponto

Reconhecer que o gráfico de f' é uma parábola com a concavidade voltada para cima .... 1 ponto

Referir que $f'(x) \geq 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ .... 1 ponto

Concluir que f é crescente .... 3 pontos

Concluir que f não tem extremos .... 2 pontos

3.º Processo

Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) .... 3 pontos

Obter $f'(x) = (x+a)^2$ .... 3 pontos

Referir que $f'(x) \geq 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ .... 3 pontos

Concluir que f é crescente .... 3 pontos

Concluir que f não tem extremos .... 2 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

14. .... **14 pontos**

Obter $\overline{OA}$ .... 2 pontos

Obter $\tan\alpha$ .... 2 pontos

Determinar a ordenada do ponto B .... 7 pontos

Esta etapa pode ser cumprida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever uma equação da reta s .... 3 pontos

Obter a abcissa do ponto B .... 3 pontos

Obter a ordenada do ponto B .... 1 ponto

2.º Processo

Escrever a ordenada do ponto B em função da respetiva abcissa.. 2 pontos

Escrever $\sqrt{3} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}x_B + 1}{x_B}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter x_B .... 2 pontos

Obter a ordenada do ponto B .... 1 ponto

Escrever uma expressão para a área do triângulo $[AOB]$ .... 1 ponto

Obter o valor pedido $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} \text{ ou } \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ .... 2 pontos

15. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Designemos por a a abcissa do ponto A e por b a abcissa do ponto B.

Escrever as coordenadas de A em função de a .... 1 ponto

Escrever as coordenadas de B em função de b .... 1 ponto

Obter o declive da reta AB em função de a e de b .... 2 pontos

Obter a equação $y=(b+a)x+1$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter $ab=-1$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Determinar $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ .... 3 pontos

Concluir que o ângulo convexo AOB é um ângulo reto .... 1 ponto

2.º Processo

Designemos por m o declive da reta AB.

Escrever $y=mx+1$ .... 2 pontos

Obter $x=\dfrac{m\pm\sqrt{m^2+4}}{2}$ .... 3 pontos

Escrever as coordenadas do ponto A em função de m .... 2 pontos

Escrever as coordenadas do ponto B em função de m .... 2 pontos

Determinar $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ .... 4 pontos

Concluir que o ângulo convexo AOB é um ângulo reto .... 1 ponto

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**3.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**11.1.**	**11.2.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	12	14	12	14	12	14	14	14	12	14	14	**158**

Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**4.**	**7.**	**10.**	**12.**	**13.**	**14.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos						**42**
TOTAL							**200**