REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\dfrac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\dfrac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

*** 1.** A Inês está a fazer um plano de treinos que inclui corrida. Em cada treino de corrida, utilizou uma aplicação para obter a distância percorrida e a energia gasta.

Na tabela ao lado, apresentam-se os valores registados em alguns desses treinos, sendo x a distância percorrida, em km, e y a correspondente energia gasta, em calorias.

Distância percorrida em km (x)	**Energia gasta** em calorias (y)
5	340
6,5	450
7	478
7,7	515
8	550
8,6	580
9,4	630

Admita como válido o modelo de regressão linear de y sobre x obtido a partir dos dados apresentados nesta tabela.

Num dos treinos de corrida, a aplicação não funcionou corretamente, mas a Inês sabe que, nesse treino, correu $9\ \mathrm{km}$.

Estime, com base nesse modelo de regressão linear, a energia, em calorias, gasta pela Inês nesse treino de corrida.

Na sua resposta, apresente:

– os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de y sobre x, arredondados às centésimas;

– o valor pedido arredondado às unidades.

*** 2.** Num ginásio, vão ser indicadas, ao acaso, duas pessoas de uma aula de dança, para exemplificar uma coreografia.

Considere a variável aleatória Y «número de homens indicados para exemplificar a coreografia».

Sabe-se que $P(Y=0)=\frac{9}{65}$ e que $P(Y=1)=\frac{32}{65}$.

Seja X a variável aleatória «número de mulheres indicadas para exemplificar a coreografia».

Determine o valor médio da variável aleatória X .

Na sua resposta, apresente:

– a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X ;

– o valor pedido arredondado às centésimas.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

* **3.** Uma empresa de construção civil dispõe de uma licença da câmara municipal para construção de apartamentos T2 e de apartamentos T3 numa determinada zona urbana desse município.

Cada apartamento T2 vai ser vendido por $150\ 000$ euros, e cada apartamento T3 vai ser vendido por $250\ 000$ euros.

A licença da câmara municipal obriga ao cumprimento das seguintes condições:

- o número de apartamentos T2 construídos não deve exceder o dobro do número de apartamentos T3 construídos;
- o número de apartamentos T3 construídos não deve exceder o triplo do número de apartamentos T2 construídos;
- o número total de apartamentos construídos não deve exceder 60 .

Determine o valor máximo que a empresa poderá receber, em euros, com a venda de todos os apartamentos construídos.

Na sua resposta, designe por x o número de apartamentos T2 e por y o número de apartamentos T3 a construir pela empresa, e apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;

– o valor pedido.

4. Um agente imobiliário dispõe de 60 apartamentos para arrendar.

Devido às flutuações do mercado de arrendamento, o agente decidiu fixar o valor das rendas, arrendando todos os apartamentos pelo mesmo valor.

O agente admite que o mercado de arrendamento satisfaz as seguintes condições:

A) se o valor da renda por apartamento for 0 euros, todos os apartamentos serão arrendados;

B) se o valor da renda por apartamento for 3000 euros, não será arrendado qualquer apartamento;

C) para valores da renda por apartamento entre 0 euros e 3000 euros, por cada 50 euros de aumento da renda por apartamento, será arrendado menos um apartamento.

Esta situação foi traduzida para o seguinte modelo linear:

$$N(p) = -\frac{1}{50}p + 60 \quad , \quad \text{com} \quad 0 \leq p \leq 3000$$

em que p é o valor da renda, em euros, e $N(p)$ é o número de apartamentos arrendados por p euros.

4.1. Mostre que o modelo apresentado satisfaz as três condições referidas.

* **4.2.** O rendimento, R , em euros, que o agente imobiliário obterá é dado por

$$R(p) = p \times N(p)$$

Determine o valor da renda por apartamento a que corresponde o maior rendimento possível, de acordo com os modelos apresentados.

5. Seja f a função que dá a altitude, em metros, de cada ponto de um percurso de 40 km, ao longo de uma prova de BTT, para cada valor da distância percorrida, x, em quilómetros, desde o ponto de partida.

Admita que

$$f(x) = 600 + 0{,}004\,(x^3 - 50x^2 + 400x)e^{0{,}01x-1} \quad , \quad \text{com } 0 \leq x \leq 40$$

* **5.1.** Determine a diferença entre as altitudes do ponto de partida e do ponto de chegada da prova de BTT.

* **5.2.** Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o número total de quilómetros da prova de BTT em que a altitude é superior a 598 metros.

Apresente o resultado em quilómetros, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

6. O Tomé faz treinos de bicicleta, no ginásio, para se preparar para as provas de BTT em que participa.

Seja T a função que dá a taxa de variação instantânea do valor da velocidade registado na bicicleta do Tomé durante um desses treinos, x minutos após o seu início.

Na Figura 1, apresenta-se o gráfico da função T, com $0 \leq x \leq 35$.

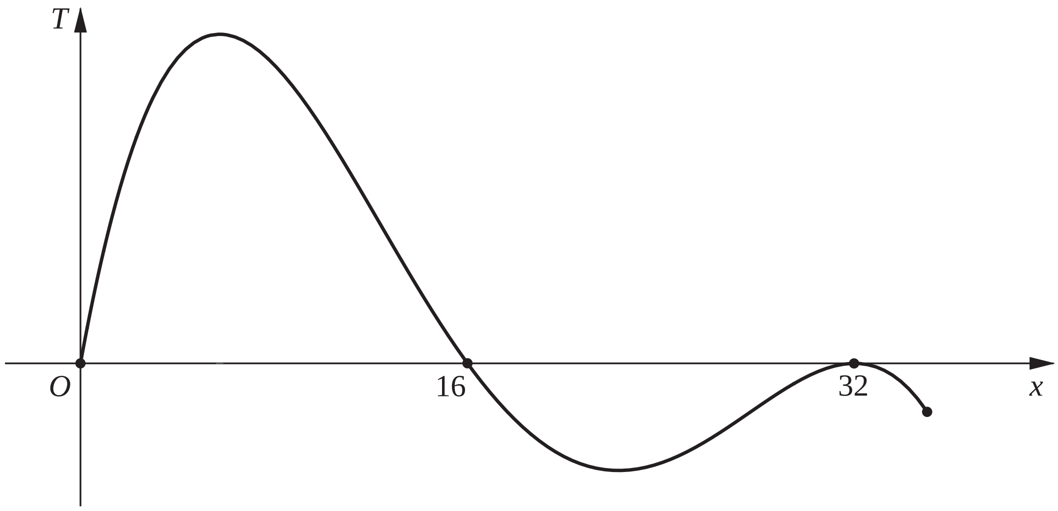

Figura 1

Tal como a figura ilustra, os zeros da função T são 0, 16 e 32.

Em que instante é que a velocidade foi máxima durante esse treino?

Justifique a sua resposta.

7. Na Figura 2, está representado um friso constituído por cinco azulejos retangulares e iguais.

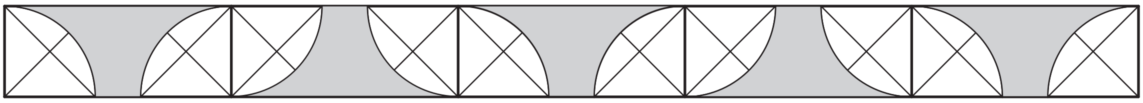

Figura 2

Cada azulejo apresenta dois quartos de círculo de raio igual à largura do azulejo.

Na Figura 3, está representado um azulejo, em referencial ortogonal e monométrico, Oxy.

Nesta figura, que não está à escala:

- o retângulo $[OABC]$ representa o azulejo;
- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox;
- o ponto C tem coordenadas $(0, 12)$;
- os pontos D e E pertencem a $[OC]$;
- o arco de circunferência AE tem centro no ponto O, e o arco de circunferência DB tem centro no ponto C;
- a reta DB é definida pela equação $y = x + 7$.

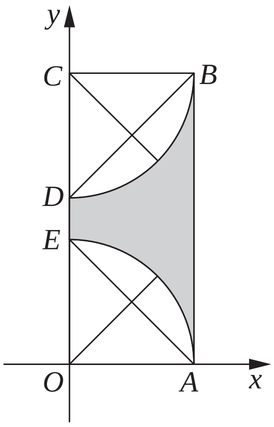

Figura 3

No referencial, a unidade é o centímetro.

* **7.1.** Determine a área da região sombreada nos cinco azulejos do friso representado na Figura 2.

Na sua resposta, apresente o resultado em centímetros quadrados, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

7.2. Na Figura 4, os retângulos $[UPQT]$ e $[RSTQ]$ representam os dois primeiros azulejos do friso.

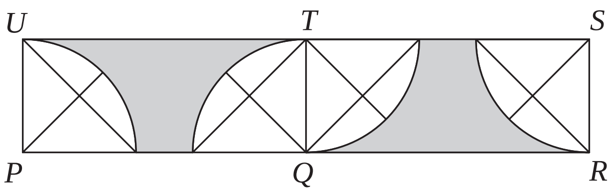

Figura 4

O retângulo $[RSTQ]$ é o transformado do retângulo $[UPQT]$ por meio de uma rotação.

Identifique o centro e a amplitude dessa rotação.

8. Na Figura 5, esquematizam-se as três primeiras etapas da construção de uma sequência de quadrados.

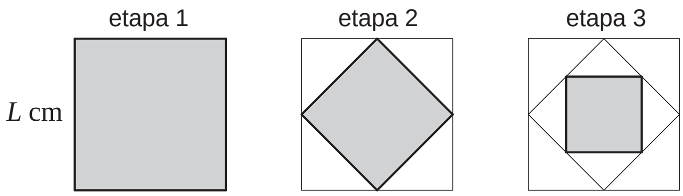

Figura 5

Como a figura ilustra:

- na etapa 1, considera-se um quadrado inicial, de lado L cm, o quadrado de ordem 1;
- na etapa 2, unem-se os pontos médios do quadrado de ordem 1, obtendo-se o quadrado de ordem 2;
- na etapa 3, unem-se os pontos médios do quadrado de ordem 2, obtendo-se o quadrado de ordem 3;
- e assim sucessivamente, obtendo-se uma sequência de quadrados inscritos uns nos outros.

8.1. Mostre que a área do quadrado de ordem n desta sequência pode ser dada, em centímetros quadrados, por

$$A_n = L^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

* **8.2.** Sabe-se que o quadrado de ordem 12 da sequência tem $0{,}5\ \mathrm{cm}^2$ de área.

Determine o valor de L.

Note que a área do quadrado de ordem n desta sequência pode ser dada, em centímetros quadrados, por $A_n = L^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

9. Nas *Bucólicas*, de Vergílio, pode ler-se o seguinte verso:

«e o Sol **duplica**, declinando, **as sombras** crescentes.»

Vergílio, *Bucólicas*, II, 67, tradução de Frederico Lourenço, Lisboa, Quetzal, 2021.

A observação que inspira o poeta é feita no final do dia e demora um quarto de hora.

O esquema da Figura 6 ilustra a situação.

Neste esquema, que não está à escala:

- $[AB]$ representa uma árvore;
- $[BC]$ representa a sombra da árvore no início da observação;
- $[BD]$ representa a sombra da árvore no fim da observação;
- $\overline{BD} = 2\,\overline{BC}$;
- α é a amplitude, em graus, do ângulo BAC ;
- β é a amplitude, em graus, do ângulo BAD .

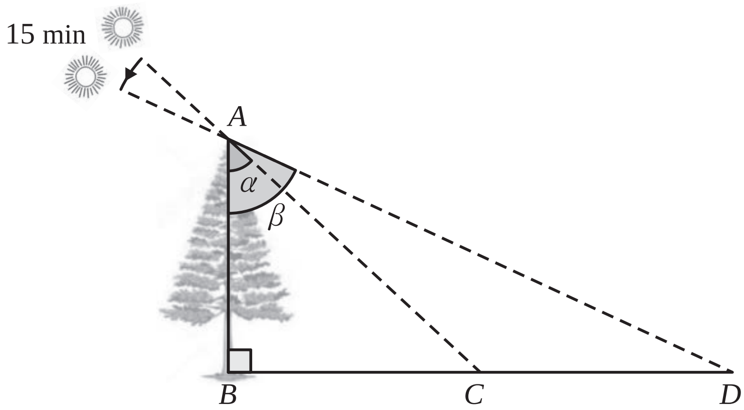

Figura 6

9.1. Mostre que $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$.

*** 9.2.** Determine a quantos minutos do pôr do sol tem início a observação da duplicação das sombras, admitindo que $\beta = \alpha + 3{,}75^\circ$.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Na sua resolução, tenha em consideração que $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$ e que o Sol, no seu movimento aparente, percorre um arco de 15° por hora.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**3.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**7.1.**	**8.2.**	**9.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	16	16	20	16	16	20	16	16	16	**152**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**4.1.**	**6.**	**7.2.**	**8.1.**	**9.1.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									**48**
TOTAL										**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Critérios de Classificação 9 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista (ver nota).
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.

13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **16 pontos**

Identificar as listas introduzidas na calculadora .... 1 ponto

Apresentar os parâmetros da reta de regressão linear
$(65{,}56 \text{ e } 17{,}27)$ ....(4 + 4).. 8 pontos

Identificar x com 9 .... 4 pontos

Obter o valor pedido (607 calorias) .... 3 pontos

2. .... **16 pontos**

Identificar $P(X=2)$ com $P(Y=0)$ .... 2 pontos

Identificar $P(X=1)$ com $P(Y=1)$ .... 2 pontos

Obter $P(X=0)$ .... 5 pontos

Esta etapa pode ser cumprida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Calcular $P(Y=2)$ $\left(\frac{24}{65}\right)$ .... 3 pontos

Identificar $P(X=0)$ com $P(Y=2)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $P(X=0)=1-P(X=1)-P(X=2)$ .... 3 pontos

Calcular $P(X=0)$ $\left(\frac{24}{65}\right)$ .... 2 pontos

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades da variável X .... 1 ponto

Obter o valor médio .... 6 pontos

Esta etapa pode ser cumprida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever uma expressão para o valor médio .... 4 pontos

Calcular o valor pedido $(0{,}77)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Apresentar as listas introduzidas na calculadora .... 1 ponto

Apresentar o valor pedido $(0{,}77)$ .... 5 pontos

3. .... **20 pontos**

Identificar a função objetivo $(L(x,y) = 150\,000x + 250\,000y)$ .... 2 pontos

Identificar as restrições $x \leq 2y$, $y \leq 3x$ e $x + y \leq 60$ .... (3 × 1) .... 3 pontos

Identificar as restrições $x \geq 0$ e $y \geq 0$ .... 1 ponto

Representar graficamente a região admissível .... 5 pontos

Representar graficamente as retas de equações $x = 2y$, $y = 3x$ e $x + y = 60$ .... 3 pontos

Assinalar o polígono .... 2 pontos

Obter as coordenadas dos vértices do polígono, exceto a origem $((15, 45)$ e $(40, 20))$ ....(2 × 2)...................................... 4 pontos

Calcular o valor obtido com as vendas correspondente a cada um dos vértices do polígono, exceto a origem (ou implementar o método da paralela à reta de nível zero – **ver nota**) ....(2 × 2)...................................... 4 pontos

Apresentar o valor pedido $(13\,500\,000$ euros$)$ .... 1 ponto

Nota – No caso de ser implementado o método da paralela à reta de nível zero, se apenas for representada, corretamente, esta reta, a pontuação a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

4.1. .... **16 pontos**

Mostrar que o modelo satisfaz a condição A) .... 4 pontos

Substituir p por 0 em $N(p)$ .... 2 pontos

Obter $N(0)$ (60) .... 2 pontos

Mostrar que o modelo satisfaz a condição B) .... 4 pontos

Substituir p por 3000 em $N(p)$ .... 2 pontos

Obter $N(3000)$ (0) .... 2 pontos

Mostrar que o modelo satisfaz a condição C) .... 8 pontos

Substituir p por $p+50$ em $N(p)$ .... 2 pontos

Obter uma expressão para $N(p+50)$ .... 2 pontos

Escrever uma expressão para $N(p+50) - N(p)$ ou para $N(p) - 1$ .... 2 pontos

Concluir que $N(p+50) - N(p) = -1$ ou que $N(p+50) = N(p) - 1$ .... 2 pontos

4.2. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Representar graficamente a função R (**ver nota**) .... 10 pontos

Respeitar o domínio .... 4 pontos

Respeitar a forma do gráfico .... 6 pontos

Assinalar o ponto do gráfico cuja ordenada é o valor máximo absoluto da função R .... 4 pontos

Obter a abcissa desse ponto (1500) .... 2 pontos

Nota – Se não for representado o referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

2.º Processo

Substituir $N(p)$ por $-\frac{1}{50}p+60$ na expressão de $R(p)$ .... 2 pontos

Obter $R(p)=-\frac{1}{50}p^2+60p$ .... 5 pontos

Obter as soluções da equação $-\frac{1}{50}p^2+60p=0$ $(0 \text{ e } 3000)$ .... 4 pontos

Obter o valor médio das soluções da equação (1500) .... 5 pontos

5.1. .... **16 pontos**

Identificar a altitude do ponto de partida com $f(0)$ .... 4 pontos

Obter $f(0)$ (600) .... 3 pontos

Identificar a altitude do ponto de chegada com $f(40)$ .... 4 pontos

Obter $f(40)$ (600) .... 3 pontos

Obter o valor pedido $(0\ \mathrm{m})$ .... 2 pontos

5.2. .... **20 pontos**

Traduzir o problema por uma condição $\left(f(x) > 598,\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Representar graficamente a função f (**ver notas 2 e 3**) .... 5 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = 598$ (**ver nota 2**) .... 2 pontos

Assinalar os pontos de intersecção dos gráficos .... (1 + 1) .... 2 pontos

Obter as abcissas desses pontos $(13{,}3437...$ e $39{,}1975...)$ ...... (2 + 2) .... 4 pontos

Obter o valor pedido $(14{,}1\text{ km})$ .... 5 pontos

Notas:

1. Se o problema for traduzido por $f(x) = 598$, $f(x) \geq 598$, $f(x) < 598$ ou $f(x) \leq 598$, a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.

2. Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estas etapas é desvalorizada em 1 ponto.

3. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

6. .... **16 pontos**

Apresentar o quadro de sinal da função T (ou equivalente) .... 4 pontos

Apresentar o quadro de variação do valor da velocidade (ou equivalente) .... 7 pontos

Apresentar o valor pedido $(16\ \text{minutos})$ .... 5 pontos

7.1. .... **16 pontos**

Reconhecer que o comprimento de cada azulejo é 12 cm .... 1 ponto

Reconhecer que a ordenada do ponto D é 7 .... 3 pontos

Obter a largura de cada azulejo (5 cm) .... 3 pontos

Obter a área de cada azulejo (60 cm^2) .... 1 ponto

Obter a área dos dois quartos de círculo .... 3 pontos

Obter a área da região sombreada de cada azulejo .... 3 pontos

Obter a área pedida (104 cm^2) .... 2 pontos

7.2. .... **16 pontos**

Referir que o centro da rotação é o ponto médio de $[TQ]$ (**ver nota**) .... 8 pontos

Referir que a amplitude da rotação é 180° ou -180° .... 8 pontos

Nota – Se for indicado o ponto T ou o ponto Q , a pontuação a atribuir a esta etapa é 2 pontos.

8.1. .... **16 pontos**

Referir que a área de cada quadrado da sequência é metade da área do quadrado imediatamente anterior .... 5 pontos

Reconhecer que as áreas dos quadrados da sequência são termos consecutivos de uma progressão geométrica .... 3 pontos

Indicar a razão dessa progressão $\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 3 pontos

Identificar o primeiro termo dessa progressão com a área do primeiro quadrado $\left(L^2\right)$ .... 2 pontos

Obter $A_n = L^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .... 3 pontos

8.2. .... **16 pontos**

Substituir n por 12 na expressão de A_n .... 4 pontos

Igualar a expressão obtida a $0{,}5$ .... 5 pontos

Obter $L^2 = 1024$ .... 5 pontos

Apresentar o valor pedido (32) .... 2 pontos

9.1. .... **16 pontos**

Escrever $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ .... 4 pontos

Escrever $\operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$ .... 4 pontos

Reconhecer que $\overline{BD} = 2\overline{BC}$ .... 4 pontos

Obter $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$ .... 4 pontos

9.2. .... **16 pontos**

Escrever $\operatorname{tg}(\alpha + 3{,}75) = 2\operatorname{tg}\alpha$ .... 3 pontos

Representar graficamente a função definida por $y = \operatorname{tg}(x + 3{,}75)$ (**ver nota**) .. 2 pontos

Representar graficamente a função definida por $y = 2\operatorname{tg} x$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dos dois gráficos relevante para a resolução do problema .... 2 pontos

Obter a abcissa desse ponto $(82{,}467...)$ .... 2 pontos

Calcular $90 - 82{,}467...$ .... 3 pontos

Obter o valor pedido $(30\ \text{minutos})$ .... 2 pontos

Nota – Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estas etapas é desvalorizada em 1 ponto.

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**3.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**7.1.**	**8.2.**	**9.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	16	16	20	16	16	20	16	16	16	**152**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**4.1.**	**6.**	**7.2.**	**8.1.**	**9.1.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									**48**
TOTAL										**200**