REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Qual é o limite da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$?

(A) 1 **(B)** $2e$ **(C)** e^2 **(D)** $+\infty$

2. A Figura 1 representa uma linha poligonal simples que começou a ser construída a partir do segmento de reta $[AB]$. O segundo segmento de reta, com uma das extremidades em B, foi construído com mais 2 cm do que o primeiro, o terceiro segmento foi construído com mais 2 cm do que o segundo, e assim sucessivamente, tendo cada segmento de reta sempre mais 2 cm do que o anterior.

Continuando a construção da linha poligonal, do modo acima descrito, até ao 100.º segmento de reta, obtém-se uma linha poligonal com o comprimento total de 104 metros.

Determine o comprimento do segmento de reta $[AB]$.

Apresente o valor pedido em centímetros.

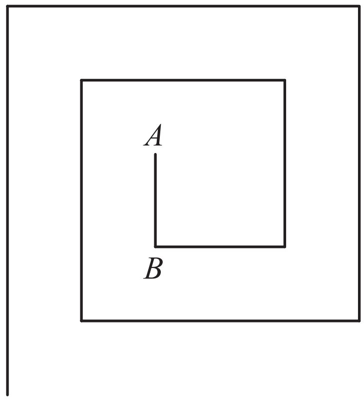

Figura 1

3. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja f uma função diferenciável, de domínio $\mathbb{R}$, cuja derivada, f', é dada por

$$f'(x) = -2xe^{1-x^2}$$

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f, caso este(s) exista(m).

4. Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4x-4}{e^{x-1}-1} & \text{se } x < 1 \\ \\ 7 \times 3^{x-1} - 3 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** sem recorrer à calculadora.

4.1. Averigue se a função g é contínua em $x = 1$.

4.2. Resolva, no intervalo $[1, +\infty[$, a equação $\log_3(g(x)) = x + \log_3 2$.

5. Um grupo de jovens inscreveu-se num campo de férias que oferece as modalidades de *surf* e de *skate*.

* **5.1.** Dez dos jovens do grupo vão deslocar-se em fila, pela praia, para uma aula de *surf*.

A Ana, o Diogo e o Francisco são três desses jovens.

De quantas formas diferentes se podem dispor os jovens na fila, ficando a Ana, o Diogo e o Francisco juntos?

(A) $483\,840$ **(B)** $241\,920$ **(C)** $60\,480$ **(D)** $30\,240$

5.2. No ato da inscrição, todos os jovens do grupo responderam a um questionário sobre a prática das modalidades de *surf* e de *skate*.

De acordo com as respostas ao questionário:

- 65% praticavam *surf* ;
- 20% praticavam *skate* e não praticavam *surf* ;
- quatro em cada cinco dos que praticavam *surf* também praticavam *skate*.

Selecionou-se, ao acaso, um jovem que, no questionário, tinha respondido que não praticava *skate*.

Determine a probabilidade de esse jovem, no questionário, também ter respondido que praticava *surf*.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

* **5.3.** Considere que, no grupo, há 70 jovens com 13 ou 14 anos de idade, sendo o número de jovens com 14 anos maior do que o número de jovens com 13 anos.

Para realizar uma determinada tarefa, vão ser selecionados, aleatoriamente, dois desses jovens.

Sabe-se que a probabilidade de selecionar dois desses jovens com idades distintas é $\frac{16}{35}$.

Determine o número de jovens com 13 anos que há no grupo.

6. Na Figura 2, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular reto $[OABCDE]$, de bases $[ABC]$ e $[OED]$.

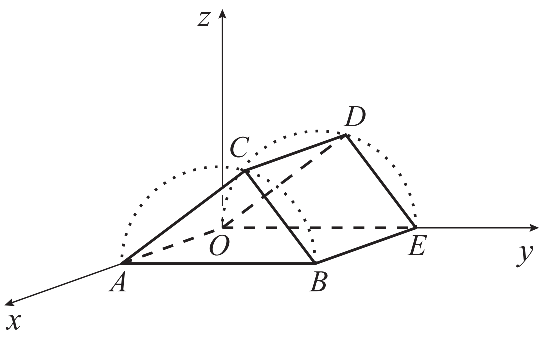

Figura 2

Sabe-se que:

- as bases do prisma estão inscritas em semicircunferências, respetivamente, de diâmetros $[AB]$ e $[OE]$;
- os vértices A e E do prisma pertencem, respetivamente, aos semieixos positivos Ox e Oy;
- $\overline{OE} = 12{,}5$;
- a reta AC é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (10, 0, 0) + k(0, 4, 3)$, $k \in \mathbb{R}$.

*** 6.1.** Qual das seguintes equações vetoriais define a reta OD?

(A) $(x, y, z) = (0, 6, 8) + k\left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$, $k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (0, -4, -3) + k\left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$, $k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (0, -4, -3) + k(0, 3, -4)$, $k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (0, 6, 8) + k(0, 3, -4)$, $k \in \mathbb{R}$

*** 6.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do ponto C.

7. Na Figura 3, estão representados, em referencial o.n. Oxy, uma circunferência de centro na origem e os pontos A, P e Q, que pertencem à circunferência.

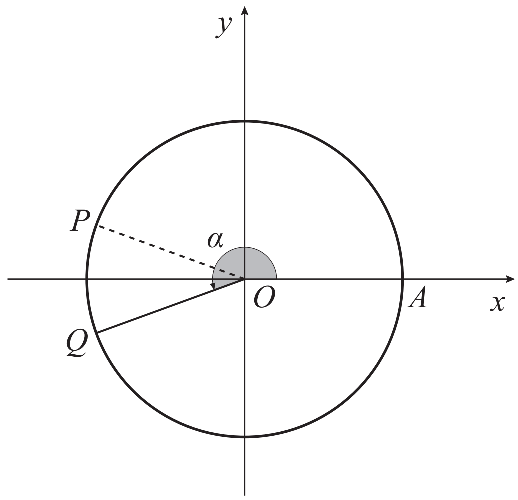

Figura 3

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(2, 0)$;
- o ângulo orientado AOQ tem amplitude $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$;
- os pontos P e Q têm a mesma abcissa;
- $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 3$.

Determine o valor de $\cos(2\alpha)$.

8. Uma empresa está a desenvolver um programa de testes para melhorar a propulsão de foguetes.

Os foguetes utilizados partem do solo e seguem uma trajetória vertical.

Em relação a um dos modelos de foguete utilizados, admita que, após o lançamento e até se esgotar o combustível, a sua distância ao solo, a, em metros, é dada, a cada instante t, em segundos, por

$$a(t) = 100\left[t + (10 - t)\ln\left(1 - \frac{t}{10}\right)\right] - 4{,}9t^2 \text{ , com } t \in [0, 8]$$

Determine, utilizando a calculadora gráfica, o instante a partir do qual, durante 3 segundos, esse foguete percorre 25 metros.

Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

9. Sejam f e g funções duas vezes diferenciáveis, de domínios $\mathbb{R}$ e $]0, +\infty[$, respetivamente, e seja r a reta de equação $y = 2x - 1$.

Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 ;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - 2x + 1\right) = 0$;
- nos respetivos domínios, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima e o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo.

Considere as proposições seguintes.

I. O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando x tende para $+\infty$.

II. $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$.

III. $f''(x) < g''(x)$, $\forall\, x \in]0, +\infty[$.

Justifique que as proposições **I**, **II** e **III** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

*** 10.** Na Figura 4, estão representados, no plano complexo, os pontos A e B.

O ponto O é a origem do referencial.

O ponto A é o afixo de um número complexo z tal que $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Re}(z) > 0$.

O ponto B é o afixo de um número complexo w tal que o ângulo convexo AOB tem amplitude $\frac{5\pi}{8}$ radianos.

Qual dos valores seguintes é um argumento de $w \times z$?

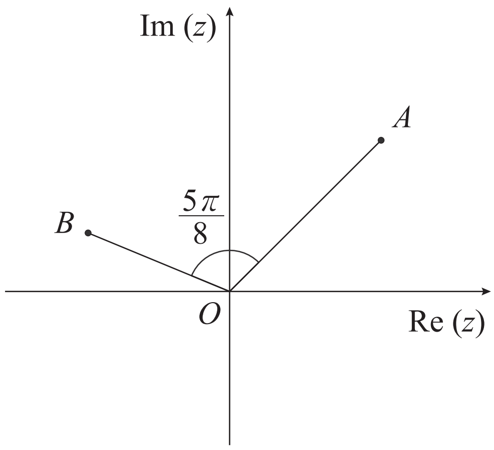

Figura 4

(A) $\frac{3\pi}{8}$ **(B)** $\frac{5\pi}{8}$

(C) $\frac{9\pi}{8}$ **(D)** $\frac{11\pi}{8}$

11. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $w = \dfrac{e^{i\frac{5\pi}{6}} - i^{17}}{i}$.

Determine, em $\mathbb{C}$, as soluções da equação $z^2 = w$.

Apresente os valores pedidos na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

12. Seja f a função, de domínio $[0, \pi]$, definida por $f(x) = \mathrm{sen}(2x) + x$, e seja r a reta de equação $y = -x + 2$.

*** 12.1.** Qual das expressões seguintes pode definir a função derivada de f ?

(A) $2 - 2\cos^2 x$ **(B)** $2 - 2\,\mathrm{sen}^2\, x$ **(C)** $3 - 4\cos^2 x$ **(D)** $3 - 4\,\mathrm{sen}^2 x$

12.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos.

Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que o gráfico da função f intersecta a reta r em, pelo menos, um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[$.

*** 13.** Sejam a e b números reais, não nulos, tais que a reta de equação $y = ax + b$ é tangente ao gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx$.

Determine as coordenadas do ponto de tangência.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**3.**	**4.1.**	**5.1.**	**5.3.**	**6.1.**	**6.2.**	**8.**	**9.**	**10.**	**12.1.**	**13.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	14	12	14	12	14	14	14	12	12	14	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**		**4.2.**		**5.2.**		**7.**		**11.**		**12.2.**		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												**42**
TOTAL													**200**