REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

*** 1.** Seja (u_n) uma sucessão tal que $\lim u_n = 0$.

Qual das expressões seguintes pode ser termo geral de (u_n) ?

(A) $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$ **(B)** $-\frac{n^2+1}{n}$ **(C)** $\frac{4n+3}{3n+4}$ **(D)** $\frac{(-1)^n}{n}$

2. Considere um triângulo equilátero, $[ABC]$, com $\overline{AB} = 1$.

Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtém-se um segundo triângulo; unindo os pontos médios dos lados do segundo triângulo, obtém-se um terceiro triângulo. Continuando a proceder deste modo, obtém-se uma sequência de n triângulos, sendo $n > 4$.

Na Figura 1, representam-se os primeiros quatro triângulos da sequência.

Mostre que a soma dos perímetros dos n triângulos da sequência é menor do que 6 unidades, qualquer que seja o valor de n .

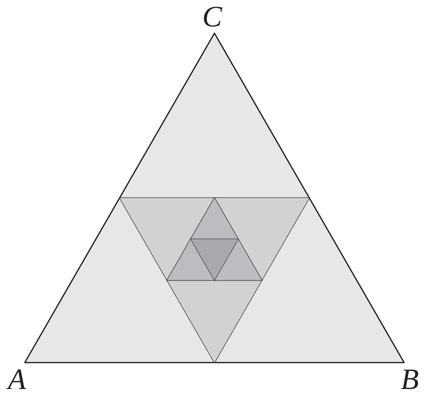


Figura 1

*** 3.** Considere todos os números naturais de seis algarismos que é possível formar com os algarismos de 1 a 9 .

Destes números, quantos têm exatamente dois cincos?

(A) $98\ 415$ **(B)** $61\ 440$ **(C)** $36\ 015$ **(D)** $25\ 200$

4. Seja E , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset E$ e $B \subset E)$.

Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos equiprováveis;
- $P(\overline{A}) = 0{,}6$;
- $P(A \cup \overline{B}) = 0{,}7$.

Determine o valor de $P((A \cup \overline{B}) \mid B)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

5. Uma certa composição geométrica é formada por n hexágonos regulares inscritos em circunferências concêntricas, contidas num mesmo plano, de centro no ponto V, sendo $n > 3$.

A Figura 2 é um esquema de parte dessa composição, e nela estão representados três dos n hexágonos que formam a composição.

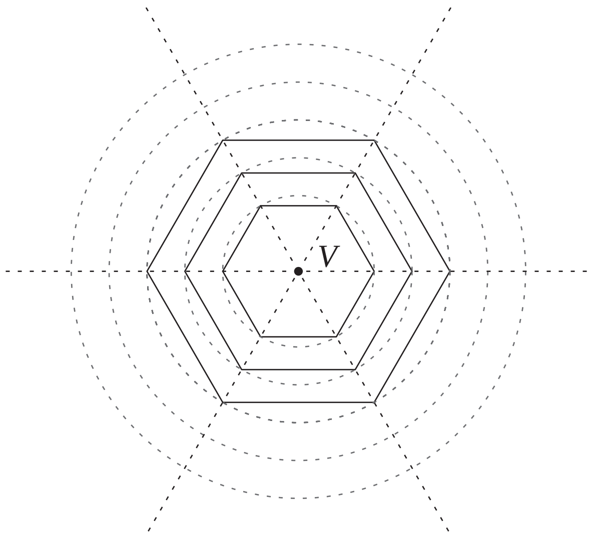


Figura 2

Considere o conjunto de pontos formado pelo ponto V e pelos vértices de todos os hexágonos da composição.

Sabe-se que, selecionando, ao acaso, dois pontos desse conjunto, a probabilidade de estes serem vértices do mesmo hexágono é igual a $\frac{5}{49}$.

Determine o valor de n.

6. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a + e^{bx}$, em que a e b são números reais.

Sabendo que o gráfico da função f contém os pontos de coordenadas $(1, 5)$ e $(2, 7)$, determine os valores de a e de b.

7. Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$?

(A) 0

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 1

(D) 2

8. Na Figura 3, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma hexagonal reto $[ABCDEFGHIJKL]$, de bases $[ABCDEF]$ e $[GHIJKL]$.

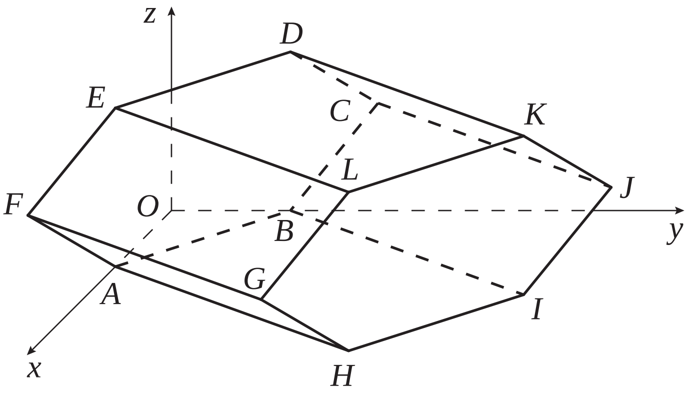


Figura 3

Sabe-se que:

- as coordenadas dos vértices A e G do prisma são, respetivamente, $(4, 0, 0)$ e $\left(12, \frac{13}{2}, 2\right)$;
- a reta EL é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (-2, -8, 4) + k(3, 4, 0)$, $k \in \mathbb{R}$.

* **8.1.** Qual das seguintes equações define a superfície esférica de diâmetro $[AG]$?

(A) $(x-8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{16}$

(B) $(x-8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{4}$

(C) $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = \frac{441}{16}$

(D) $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = \frac{441}{4}$

* **8.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do vértice F do prisma.

9. Na Figura 4, está representado, em referencial o.n. Oxy, o retângulo $[OABC]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Oy;
- o ponto D pertence ao segmento de reta $[OA]$;
- o ponto E pertence ao segmento de reta $[CB]$;
- $\overline{EB} = \overline{OD} = \frac{\overline{OA}}{3}$;
- $\overline{OC} = \frac{\overline{OA}}{4}$;
- $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = -7$.

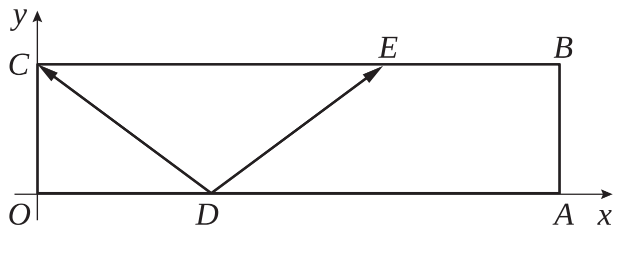


Figura 4

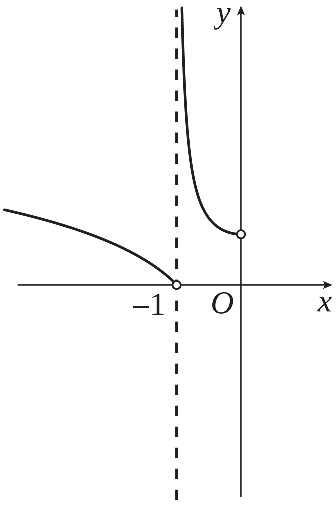
Determine $\overline{OA}$.

10. Seja g uma função par, diferenciável, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, tal que:

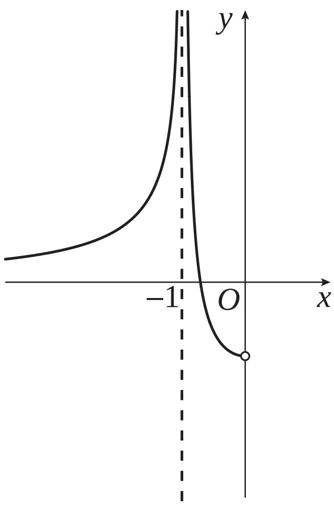
- $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$;
- $g(0) < 0$;
- $g'(x) < 0 , \ \forall x \in]-\infty, -1[$.

Em cada um dos referenciais o.n. Oxy seguintes, **I**, **II** e **III**, estão representadas parte do gráfico de uma função e a assíntota a esse gráfico, de equação $x = -1$.

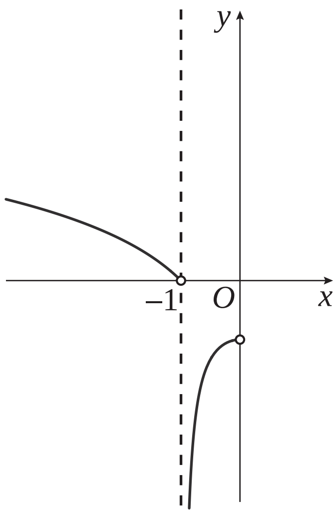
(I)



(II)



(III)



Justifique que em nenhum dos referenciais, **I**, **II** e **III**, pode estar representada parte do gráfico da função g em $]-\infty, 0[\setminus \{-1\}$.

Na sua resposta, apresente, para cada um dos referenciais, uma razão que justifique a impossibilidade de nele estar representada parte do gráfico da função g em $]-\infty, 0[\setminus \{-1\}$.

11. Na Figura 5, está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero, $[ABC]$, inscrito numa circunferência de centro na origem do referencial, O .

O ponto A pertence ao semieixo imaginário positivo.

Os pontos A e B são os afixos dos números complexos z_1 e z_2, respetivamente .

A qual dos quadrantes do plano complexo pertence o afixo do número complexo $z_1^2 \times z_2$?

(A) Ao primeiro. **(B)** Ao segundo.

(C) Ao terceiro. **(D)** Ao quarto.

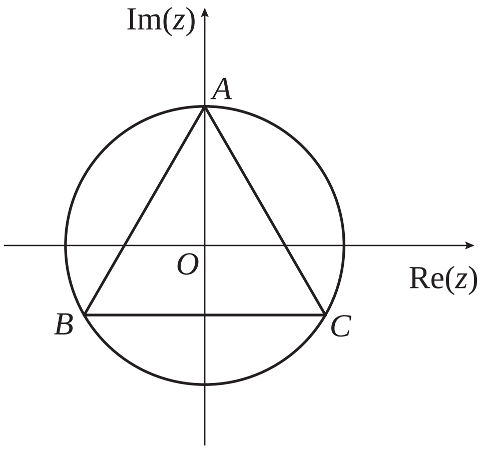


Figura 5

12. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $z = \dfrac{2i^{11}e^{i\alpha}}{-1-\sqrt{3}\,i}$, com $\alpha \in [0, 2\pi[$.

Sabe-se que:

- $\operatorname{Re}(z) = -\operatorname{Im}(z)$;
- o afixo de z pertence ao 4.º quadrante.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de α .

* **13.** Para fazer obras de remodelação das instalações, uma pequena empresa pretende pedir um empréstimo a um banco, a pagar em prestações mensais iguais.

De acordo com a proposta do banco, o valor da prestação mensal a pagar, p, em euros, é dado, em função da taxa de juro anual aplicada, j, em percentagem, pela expressão

$$p(j) = \frac{62{,}5j}{1-\left(1+\dfrac{j}{1200}\right)^{-120}} \quad , \quad \text{com } j > 0$$

Sabe-se que, no caso de a taxa de juro anual inicial duplicar, a prestação mensal aumentará 120 euros.

Determine, utilizando a calculadora gráfica, a taxa de juro anual inicial.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às milésimas.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

14. Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \frac{\ln x + 2x}{x}$$

Resolva os itens **14.1.** e **14.2.** sem recorrer à calculadora.

* **14.1.** O gráfico da função f admite uma assíntota vertical e uma assíntota horizontal.

Determine uma equação de cada uma dessas assíntotas.

14.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos e determine esses extremos, caso existam.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia da função f.

15. Na Figura 6, estão representados, em referencial o.n. Oxy, uma semicircunferência de raio 2, e centro na origem do referencial, e o triângulo isósceles $[ABC]$.

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao semieixo positivo Ox;
- o vértice B pertence ao semieixo positivo Oy;
- o vértice C pertence ao semieixo negativo Ox;
- $\overline{AB} = \overline{BC}$;
- o lado $[AB]$ é tangente à semicircunferência no ponto T;
- $A\hat{O}T = \alpha$, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

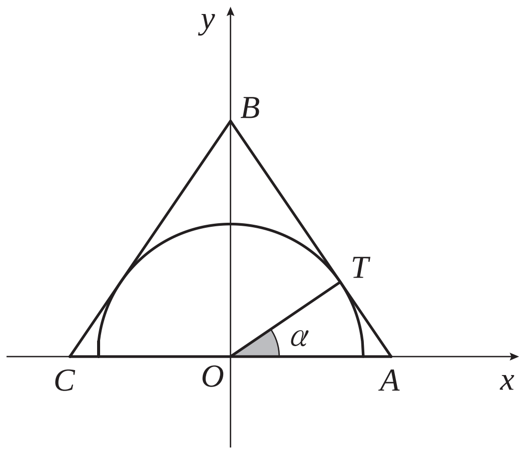


Figura 6

Prove que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de α, por $\dfrac{8}{\operatorname{sen}(2\alpha)}$.

16. Considere as funções f e g, de domínio $]0, +\infty[$, definidas por $f(x) = \frac{k}{x}$ e por $g(x) = -\frac{k}{x}$, com $k > 0$.

Considere ainda:

- dois pontos P e Q, com a mesma abcissa, pertencentes, respetivamente, ao gráfico da função f e ao gráfico da função g;
- a reta s, tangente ao gráfico da função f no ponto P;
- a reta t, tangente ao gráfico da função g no ponto Q;
- o ponto R, ponto de intersecção das retas s e t.

Mostre que, qualquer que seja a abcissa dos pontos P e Q, a área do triângulo $[PQR]$ é igual a k.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	3.	5.	7.	8.1.	8.2.	10.	11.	13.	14.1.	15.	16.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	12	14	12	12	14	14	12	14	14	14	14	**158**

Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	2.	4.	6.	9.	12.	14.2.	Subtotal
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos						**42**
TOTAL							**200**

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Critérios de Classificação 13 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentem organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentem organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Linguagem científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentem organizados por etapas, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção cujos critérios se apresentem organizados por etapas:

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **12 pontos**

Opção **(D)**

2. .... **14 pontos**

Reconhecer que os perímetros dos triângulos da sequência são termos consecutivos de uma progressão geométrica .... 2 pontos

Identificar a razão da progressão $\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 2 pontos

Identificar o primeiro termo da progressão (3) .... 1 ponto

Mostrar o pretendido .... 9 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever uma expressão para a soma dos perímetros dos n triângulos $\left(S_n = 3 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\text{, ou equivalente}\right)$ .... 3 pontos

Reconhecer que $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$ é uma condição universal .... 4 pontos

Concluir o pretendido .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever uma expressão para a soma dos perímetros dos n triângulos $\left(S_n = 3 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\text{, ou equivalente}\right)$ .... 3 pontos

Calcular o limite da sucessão de termo geral S_n .... 3 pontos

Referir que (S_n) é crescente .... 2 pontos

Concluir o pretendido .... 1 ponto

3. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

4. .... **14 pontos**

Escrever $P((A \cup \overline{B}) \mid B) = \dfrac{P((A \cup \overline{B}) \cap B)}{P(B)}$ .... 1 ponto

Obter $P(A)$ $(0{,}4)$ .... 1 ponto

Reconhecer que $P(B) = P(A)$ .... 1 ponto

Obter $P(\overline{B})$ $(0{,}6)$ .... 1 ponto

Reconhecer que $(A \cup \overline{B}) \cap B = A \cap B$ .... 3 pontos

Escrever $P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B})$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter $P(A \cap \overline{B})$ $(0{,}3)$ .... 2 pontos

Escrever $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B})$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $P(A \cap B)$ $(0{,}1)$ .... 1 ponto

Obter o valor pedido $\left(\dfrac{1}{4}\right)$ .... 1 ponto

5. .... **14 pontos**

Identificar o número de casos possíveis com
${}^{6n+1}C_2$ (ou com ${}^{6n+1}A_2$) (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Identificar o número de casos favoráveis com
${}^{6}C_2 \times n$ (ou, tendo em conta a etapa anterior, com ${}^{6}A_2 \times n$) (**ver nota 2**) .... 4 pontos

Escrever a equação $\dfrac{{}^{6}C_2 \times n}{{}^{6n+1}C_2} = \dfrac{5}{49}$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter o valor pedido (8) .... 3 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{6n+1}C_2$ (ou a ${}^{6n+1}A_2$), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{6}C_2 \times n$ (ou, tendo em conta a etapa anterior, a ${}^{6}A_2 \times n$), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

6. .... **14 pontos**

Reconhecer que $f(1) = 5$ e que $f(2) = 7$ .... 3 pontos

Escrever $a + e^{b} = 5 \ \wedge \ a + e^{2b} = 7$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter as soluções da condição $a + e^{b} = 5 \ \wedge \ a + e^{2b} = 7$ .... 9 pontos

- Obter $e^{2b} - e^{b} - 2 = 0$ (ou equivalente) ou
  $a^2 - 9a + 18 = 0$ (ou equivalente) .... 4 pontos
- Obter $e^{b} = 2 \ \vee \ e^{b} = -1$ ou $a = 6 \ \vee \ a = 3$ .... 2 pontos
- Reconhecer que $e^{b} = -1$ é uma condição impossível .... 1 ponto
- Obter os valores pedidos $(a = 3$ e $b = \ln 2)$ .... 2 pontos

7. .... **12 pontos**

Opção **(D)**

8.1. .... **12 pontos**

Opção **(A)**

8.2. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que a reta EL é perpendicular ao plano ABC .... 1 ponto

Identificar o vetor de coordenadas $(3, 4, 0)$ como vetor normal ao plano ABC .... 1 ponto

Obter uma equação do plano ABC .... 4 pontos

Escrever $3x + 4y + d = 0$ .... 2 pontos

Escrever $3 \times 4 + d = 0$ .... 1 ponto

Obter o valor de d (-12) .... 1 ponto

Reconhecer que a reta FG é paralela à reta EL .... 2 pontos

Reconhecer que as coordenadas do ponto F são da forma $\left(12 + 3k, \frac{13}{2} + 4k, 2\right)$ .... 2 pontos

Escrever $3(12 + 3k) + 4\left(\frac{13}{2} + 4k\right) - 12 = 0$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter o valor de k (-2) .... 2 pontos

Obter o pedido $\left(\left(6, -\frac{3}{2}, 2\right)\right)$ .... 1 ponto

2.º Processo

Sejam (a, b, c) as coordenadas do ponto F.

Reconhecer que o vetor $\overrightarrow{AF}$ é perpendicular ao vetor de coordenadas $(3, 4, 0)$ .... 2 pontos

Determinar, em função de a, b e c, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AF}$ .... 2 pontos

Escrever $3(a-4)+4b=0$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Reconhecer que o vetor $\overrightarrow{GF}$ é colinear com o vetor de coordenadas $(3, 4, 0)$ .... 2 pontos

Determinar, em função de a, b e c, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GF}$ .... 2 pontos

Escrever $\frac{a-12}{3}=\frac{b-\frac{13}{2}}{4} \wedge c-2=0$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter o pedido $\left(\left(6, -\frac{3}{2}, 2\right)\right)$ .... 2 pontos

9. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Seja a a abcissa do ponto A.

Reconhecer que as coordenadas dos pontos C, D e E são, respetivamente, $\left(0, \frac{a}{4}\right)$, $\left(\frac{a}{3}, 0\right)$ e $\left(\frac{2a}{3}, \frac{a}{4}\right)$ .... 3 pontos

Determinar as coordenadas de $\overrightarrow{DC}$ em função de a .... 3 pontos

Determinar as coordenadas de $\overrightarrow{DE}$ em função de a .... 3 pontos

Obter $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = -\frac{a}{3} \times \frac{a}{3} + \frac{a}{4} \times \frac{a}{4}$ .... 3 pontos

Escrever $-\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{16}=-7$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter o valor pedido (12) .... 1 ponto

2.º Processo

Seja P a projeção ortogonal de E no segmento de reta $[OA]$.

Escrever $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$ .... 2 pontos

Escrever $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PE}$ .... 2 pontos

Escrever $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = \left(\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PE}\right)$ .... 1 ponto

Obter $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{PE}$ .... 2 pontos

Obter $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{PE}$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\|\overrightarrow{DO}\| = \|\overrightarrow{DP}\|$ .... 1 ponto

Obter $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = -\frac{\overline{OA}}{3} \times \frac{\overline{OA}}{3} + \frac{\overline{OA}}{4} \times \frac{\overline{OA}}{4}$ .... 2 pontos

Escrever $-\frac{\overline{OA}^2}{9} + \frac{\overline{OA}^2}{16} = -7$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter o valor pedido (12) .... 1 ponto

3.º Processo

Seja a o comprimento de $[OA]$ e seja α a amplitude do ângulo CDO.

Escrever $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = \|\overrightarrow{DC}\| \|\overrightarrow{DE}\| \cos\left(E\hat{D}C\right)$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\|\overrightarrow{DC}\| = \|\overrightarrow{DE}\|$ .... 1 ponto

Obter $\|\overrightarrow{DC}\|$ em função de a .... 2 pontos

Calcular $\cos\left(E\hat{D}C\right)$ .... 8 pontos

- Reconhecer que $C\hat{D}O = A\hat{D}E$ .... 1 ponto
- Reconhecer que $E\hat{D}C = \pi - 2\alpha$ .... 1 ponto
- Escrever $\cos(\pi - 2\alpha) = -\cos(2\alpha)$ .... 1 ponto
- Escrever $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$ (ou equivalente) .... 1 ponto
- Obter o valor de $\cos\alpha$ .... 3 pontos
- Obter o valor de $\cos\left(E\hat{D}C\right)$ .... 1 ponto

Obter $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE}$ em função de a .... 1 ponto

Obter o valor pedido (12) .... 1 ponto

10. .... **14 pontos**

Tópicos de resposta

- Justifica a impossibilidade relativa ao referencial I: Dado que g, por ser diferenciável, é contínua, tem-se $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = g(0) < 0$. Na função representada no referencial I, o limite quando x tende para 0, por valores à esquerda, é positivo .
- Justifica a impossibilidade relativa ao referencial II: Dado que $g'(x) < 0, \forall\, x \in \left]-\infty, -1\right[$, g é decrescente em $\left]-\infty, -1\right[$. A função representada no referencial II não é decrescente no intervalo $\left]-\infty, -1\right[$.
- Justifica a impossibilidade relativa ao referencial III: Dado que g é par e $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$, tem-se $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = +\infty$, o que não se observa na representação gráfica do referencial III.

Parâmetros	Níveis	Descritores de desempenho	Pontuação
A Conteúdos	**5**	Apresenta, de forma completa, as três justificações.	12
	4	Apresenta, de forma completa, duas justificações e, de forma incompleta, uma justificação.	10
	3	Apresenta, de forma completa, apenas duas justificações. OU Apresenta, de forma completa, uma justificação e, de forma incompleta, duas justificações.	8
	2	Apresenta, de forma completa, apenas uma justificação e, de forma incompleta, apenas outra justificação. OU Apresenta, de forma incompleta, as três justificações.	5
	1	Apresenta, de forma completa, apenas uma justificação. OU Apresenta, de forma incompleta, apenas duas justificações.	3
B Linguagem científica	**2**	Utiliza adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	2
	1	Utiliza, embora com uma ou mais falhas, o vocabulário específico da Matemática.	1

11. .... **12 pontos**

Opção **(A)**

12. .... **14 pontos**

Substituir i^{11} por $-i$ .... 1 ponto

Escrever $-2i = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $2e^{i\frac{3\pi}{2}} \times e^{i\alpha} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Escrever $-1-\sqrt{3}\,i$ na forma trigonométrica .... 3 pontos

- Determinar $\left|-1-\sqrt{3}\,i\right|$ .... 1 ponto
- Determinar um argumento de $-1-\sqrt{3}\,i$ .... 2 pontos

Obter $z = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Reconhecer que $z = e^{i\frac{7\pi}{4}}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Concluir que $\alpha = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter o valor pedido $\left(\frac{19\pi}{12}\right)$ .... 1 ponto

13. .... **14 pontos**

Identificar a prestação mensal após o acréscimo de 120 euros com $p(j)+120$ .... 2 pontos

Apresentar a equação $p(2j) = p(j)+120$ (ou equivalente) (**ver nota 1**) ..... 3 pontos

Representar o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Assinalar o ponto relevante .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $(3{,}281\%)$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, desde que seja inequívoco que correspondem à resolução da equação que traduz corretamente o problema.
2. Se não for apresentado um referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

14.1. .... **14 pontos**

Determinar uma equação da assíntota vertical .... 6 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ .... 2 pontos

Concluir que $x = 0$ é uma equação da assíntota vertical .... 2 pontos

2.º Processo

Referir que a função f é contínua em $]0, +\infty[$ .... 4 pontos

Concluir que $x = 0$ é uma equação da assíntota vertical .... 2 pontos

Determinar uma equação da assíntota horizontal .... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x + 2x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x} + 2 \right)$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x} + 2 \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} + 2$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ .... 1 ponto

Concluir que $y = 2$ é uma equação da assíntota horizontal .. 2 pontos

14.2. .... **14 pontos**

Determinar $f'(x)$ (**ver nota 1**) .... 3 pontos

Escrever $f'(x) = 0$ .... 1 ponto

Determinar os zeros de f' .... 2 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f .... 4 pontos

Apresentar os intervalos de monotonia de f (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Reconhecer que o extremo relativo é $f(e)$ .... 1 ponto

Determinar $f(e)$ $\left(\dfrac{1}{e} + 2, \text{ ou equivalente} \right)$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2. Se for referido que a função f é crescente em $]0, e[$, em vez de $]0, e]$, e decrescente em $]e, +\infty[$, em vez de $[e, +\infty[$, esta etapa deve ser considerada cumprida.

15. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $\frac{2}{\overline{OB}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter $\overline{OB} = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}$ .... 2 pontos

Escrever $\frac{2}{\overline{OA}} = \cos\alpha$ .... 2 pontos

Obter $\overline{OA} = \frac{2}{\cos\alpha}$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\overline{AC} = \frac{4}{\cos\alpha}$ .... 1 ponto

Identificar a área do triângulo $[ABC]$ com

$\dfrac{\frac{4}{\cos\alpha} \times \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}}{2}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $\frac{8}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$ .... 1 ponto

Concluir o pretendido .... 2 pontos

2.º Processo

Reconhecer que α é a inclinação da reta OT .... 1 ponto

Reconhecer que o declive da reta AB é $-\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ .... 1 ponto

Reconhecer que as coordenadas do ponto T são $(2\cos\alpha, 2\operatorname{sen}\alpha)$ .... 1 ponto

Escrever $y = -\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}x + b$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter $b = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\overline{OB} = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}$ .... 1 ponto

Determinar a abcissa do ponto A .... 2 pontos

- Escrever $-\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}x + \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha} = 0$ .... 1 ponto
- Obter $x = \frac{2}{\cos\alpha}$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\overline{AC} = \frac{4}{\cos\alpha}$ .... 1 ponto

Identificar a área do triângulo $[ABC]$ com

$\dfrac{\frac{4}{\cos\alpha} \times \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}}{2}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $\frac{8}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$ .... 1 ponto

Concluir o pretendido .... 2 pontos

16. .... **14 pontos**

Designe-se por a a abcissa dos pontos P e Q.

Reconhecer que as ordenadas dos pontos P e Q são, respetivamente, $\frac{k}{a}$ e $-\frac{k}{a}$ .... 2 pontos

Determinar $f'(x)$ e $g'(x)$ .... 2 pontos

Obter as equações das retas tangentes aos gráficos das funções f e g, respetivamente, nos pontos P e Q .... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto R .... 2 pontos

Reconhecer que a é a altura do triângulo $[PQR]$ relativa ao lado $[PQ]$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\frac{2k}{a}$ é o comprimento de $[PQ]$ .... 2 pontos

Concluir o pretendido .... 2 pontos

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**3.**	**5.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**10.**	**11.**	**13.**	**14.1.**	**15.**	**16.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	12	14	12	12	14	14	12	14	14	14	14	**158**

Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**4.**	**6.**	**9.**	**12.**	**14.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos						**42**
TOTAL							**200**