

**Exame Final Nacional de Matemática B**  
**Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2023**

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

8 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

# Formulário

---

## Geometria

### Comprimento de um arco de circunferência:

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$  ( $\alpha$  – amplitude, em graus, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

### Áreas de figuras planas

**Losango:**  $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

**Trapézio:**  $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

**Polígono regular:**  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

### Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$  ( $\alpha$  – amplitude, em graus, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

### Áreas de superfícies

**Área lateral de um cone:**  $\pi r g$  ( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:**  $4 \pi r^2$  ( $r$  – raio)

**Área lateral de um cilindro reto:**  $2 \pi r g$  ( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

## Volumes

**Pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Cone:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Esfera:**  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

**Cilindro:**  $\text{Área da base} \times \text{Altura}$

## Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão  $(u_n)$ :

• **Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

• **Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Probabilidades e Estatística

Se  $X$  é uma variável aleatória discreta de valores  $x_i$  com probabilidade  $p_i$ , então:

• **Valor médio de  $X$ :**

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

• **Desvio padrão de  $X$ :**

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se  $X$  é uma variável aleatória normal de valor médio  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

- \* 1. Uma empresa do sector da alimentação decidiu produzir dois suplementos alimentares, I e II, ambos feitos à base de maçã, amendoim e chocolate.

Cada embalagem do suplemento I tem o custo de 2,00 € e contém 0,4 kg de maçã, 0,5 kg de amendoim e 0,6 kg de chocolate.

Cada embalagem do suplemento II tem o custo de 1,50 € e contém 0,6 kg de maçã, 0,5 kg de amendoim e 0,4 kg de chocolate.

Para otimizar a produção, a empresa tem de gastar, diariamente, pelo menos, 140 kg de maçã, pelo menos, 150 kg de amendoim e, pelo menos, 140 kg de chocolate.

A empresa não consegue produzir mais do que 350 embalagens por dia.

Quantas embalagens do suplemento I e quantas embalagens do suplemento II devem ser produzidas, diariamente, pela empresa, para que o custo total diário da produção dos dois suplementos seja mínimo?

Na sua resposta, designe por  $x$  o número de embalagens do suplemento I e por  $y$  o número de embalagens do suplemento II a produzir, diariamente, pela empresa, e apresente:

- a função objetivo;
- as restrições do problema;
- uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;
- o valor de  $x$  e o valor de  $y$  correspondentes à solução do problema.

- \* 2. A tabela seguinte é referente ao número de maçãs e ao peso\* médio, em gramas, das maçãs produzidas por algumas das macieiras de um pomar, na colheita do ano de 2022.

Considere adequado o modelo de regressão linear de  $y$  sobre  $x$  obtido a partir dos dados apresentados na tabela.

Uma outra macieira do pomar produziu 160 maçãs na colheita do ano de 2022.

Estime, com base no modelo proposto, o peso médio dessas maçãs.

Na sua resposta, apresente:

- os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de  $y$  sobre  $x$ , arredondados às milésimas;
- o valor pedido em gramas, arredondado às décimas.

Número de maçãs por macieira ( $x$ )	Peso médio, em gramas, das maçãs ( $y$ )
318	163,87
661	94,72
530	106,58
214	166,75
360	148,08
114	212,06
632	134,91
483	115,02
93	226,40
470	139,72

\* Na sua aceção corrente, a palavra «peso» é utilizada como sinónimo de massa.

3. Na aldeia do Sr. Silva, para se conservar as maçãs colhidas nos pomares, é costume guardá-las num local escuro, dispostas sobre uma superfície seca e plana.

As maçãs são dispostas em filas, mas sem ficarem em contacto umas com as outras, pois, caso ficassem em contacto, se uma das maçãs apodrecesse, as maçãs sadias em contacto com a maçã apodrecida também começariam a apodrecer.

O neto do Sr. Silva, que não conhecia bem o método usado pelo avô, dispôs as maçãs em filas, mas deixou-as em contacto umas com as outras, como se ilustra na Figura 1.



Figura 1

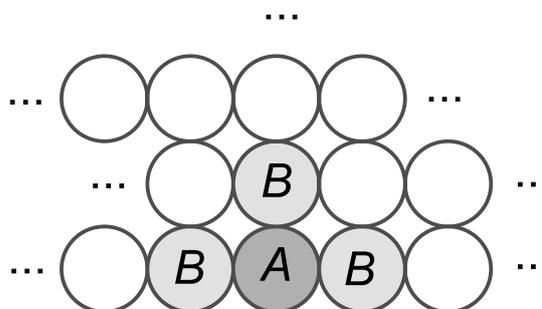


Figura 2

Uma dessas maçãs, identificada por  $A$  na Figura 2, apodreceu num certo dia.

No dia seguinte, apodreceram as três maçãs identificadas por  $B$  na Figura 2, que estavam em contacto com essa maçã. Em cada um dos dias seguintes, apodreceram todas as maçãs sadias que estavam em contacto com, pelo menos, uma maçã que tivesse apodrecido no dia anterior.

Admita que não há outro modo de as maçãs colhidas apodrecerem.

Tal como a Figura 2 sugere, as maçãs apodrecidas dispõem-se em forma triangular. Esta expansão triangular manteve-se durante 12 dias consecutivos.

- \* 3.1. Justifique que os números de maçãs que apodrecem, por dia, desde o primeiro até ao décimo segundo, são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Na sua resposta, indique a razão dessa progressão.

- 3.2. Do primeiro ao décimo segundo dia, apodreceram 80% das maçãs colhidas.

Quantas maçãs foram colhidas?

Justifique a sua resposta.

4. Numa unidade industrial de armazenamento de fruta, as maçãs são sujeitas a um banho de arrefecimento antes de serem armazenadas.

Admita que a temperatura,  $T$ , em graus Celsius, das maçãs,  $x$  minutos após o início do banho de arrefecimento, é dada por

$$T(x) = -3 + (T_0 + 3)e^{-0,0432365x}, \text{ com } x \geq 0,$$

em que  $T_0$  é a temperatura, em graus Celsius, das maçãs no início do banho.

Para serem armazenadas, as maçãs devem estar a uma temperatura inferior a  $7^\circ\text{C}$ .

\* 4.1. Num certo dia, as maçãs estavam à temperatura de  $25^{\circ}\text{C}$  quando se iniciou o banho de arrefecimento.

As maçãs estariam nas condições de armazenamento descritas 27 minutos após o início desse banho? Justifique a sua resposta.

4.2. Num outro dia, as maçãs estavam à temperatura de  $33^{\circ}\text{C}$  quando se iniciou o banho de arrefecimento.

\* 4.2.1. Determine a duração mínima do banho de arrefecimento, para que as maçãs pudessem ser armazenadas.

Apresente o resultado em minutos, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, sempre que proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4.2.2. Seja  $V$  a função que dá a taxa de variação instantânea da função  $T$ , para cada valor de  $x$ . Interprete, no contexto descrito, o significado de  $V(16) \approx -0,78$ .

\* 5. O bravo-de-esmolfe é uma variedade portuguesa de maçã, com origem na aldeia de Esmolfe, situada no concelho de Penalva do Castelo.

Numa colheita, foram apanhadas 50 000 maçãs bravo-de-esmolfe.

Dessa colheita, serão comercializadas apenas as maçãs com calibre superior a 55 mm.

Admita que o calibre, em milímetros, das maçãs colhidas segue, aproximadamente, uma distribuição normal de valor médio 60 mm e desvio padrão 5 mm.

Determine quantas maçãs dessa colheita se espera comercializar.

Apresente o resultado em milhares, arredondado às unidades de milhar.

Em cálculos intermédios, sempre que proceder a arredondamentos, conserve quatro casas decimais.

6. Admita que o número de horas de sol,  $S$ , em Penalva do Castelo, no dia de ordem  $x$  do ano de 2022 é dado por

$$S(x) = 12,1237 + 2,8720 \operatorname{sen}(0,0168x - 1,3255), \quad \text{para } x \in \{1, 2, \dots, 365\}$$

O argumento da função seno está em radianos.

No dia 1 de janeiro de 2022, em Penalva do Castelo, o sol nasceu às 7h 56min. Nesse dia, o Sr. Silva esteve no pomar desde as 15 horas até ao pôr do sol.

Quanto tempo esteve o Sr. Silva no pomar?

Apresente o resultado em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

7. O preço por quilograma de maçãs pode variar em função do seu peso\* médio.

Admita que o valor a pagar,  $P$ , em euros, por quilograma de uma variedade de maçãs, em função do peso médio das maçãs,  $x$ , em gramas, é dado, aproximadamente, por

$$P(x) = 1,059 \ln(x) - 3,2553, \text{ com } 40 \leq x \leq 270$$

A avó Maria comprou cinco maçãs, com os pesos que se seguem, em **gramas**:

181 g ; 185 g ; 188 g ; 190 g ; 192 g .

Determine, de acordo com o modelo apresentado, o preço por quilograma das maçãs que a avó Maria comprou.

Apresente o valor pedido em euros, arredondado às centésimas.

Em cálculos intermédios, sempre que proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

\* Na sua aceção corrente, a palavra «peso» é utilizada como sinónimo de massa.

**\* 8.** No pomar do Sr. Silva, existe um depósito cilíndrico com 2,5 m de altura, assente por uma das bases, como se ilustra na Figura 3.

O depósito encontrava-se vazio, e o seu enchimento, que demorou 6 horas, foi feito a partir de uma torneira com caudal constante.

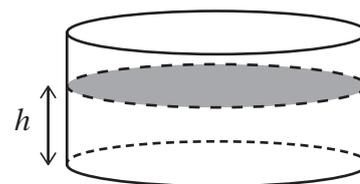


Figura 3

Seja  $h$  a função que dá a altura, em metros, de água no depósito,  $t$  horas após o início do seu enchimento, até ao instante em que o depósito ficou cheio.

Na Figura 4, estão representados os gráficos A e B de duas funções.

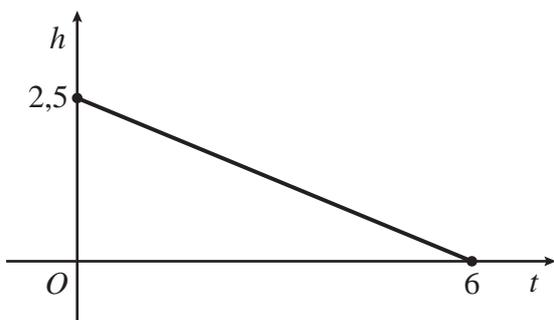


Gráfico A

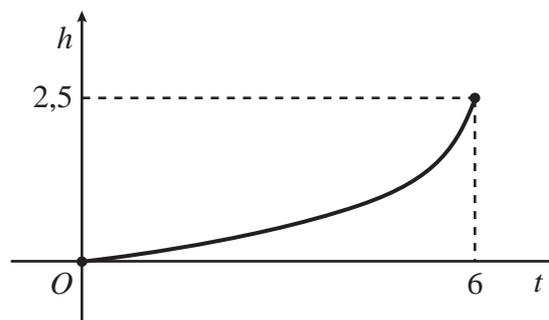


Gráfico B

Figura 4

Considere a afirmação:

«Nem o gráfico A nem o gráfico B podem representar a função  $h$ .»

Justifique que a afirmação anterior é verdadeira, apresentando uma razão para cada um dos gráficos.

9. A Figura 5 é uma fotografia de uma forma, com formato de tronco de cone, que a avó Maria usa para fazer o seu bolo de maçã.



Figura 5

No esquema da Figura 6, o tronco de cone, representado a sombreado, foi obtido a partir do cone circular reto de vértice  $V$  e base de diâmetro  $[AB]$ , por um corte paralelo a esta base.

Neste esquema, que não está à escala:

- o tronco de cone representa a forma e tem 10 cm de altura;
- $[AB]$  representa um diâmetro da circunferência que delimita o bordo da forma e mede 22 cm ;
- $[CD]$  representa um diâmetro da base da forma;
- o cone de vértice  $V$  e base de diâmetro  $[CD]$  tem 45 cm de altura.

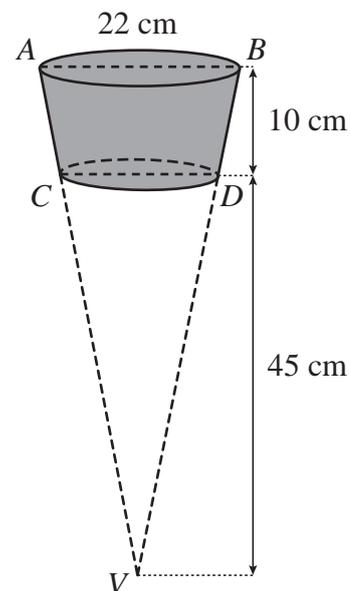


Figura 6

\* 9.1. Determine a capacidade da forma.

Apresente o resultado em litros, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

9.2. No cone de vértice  $V$  e base de diâmetro  $[AB]$ , esquematizado na Figura 6, fixou-se um referencial ortogonal e monométrico,  $Oxyz$ , como se representa na Figura 7. No referencial, a unidade é o centímetro.

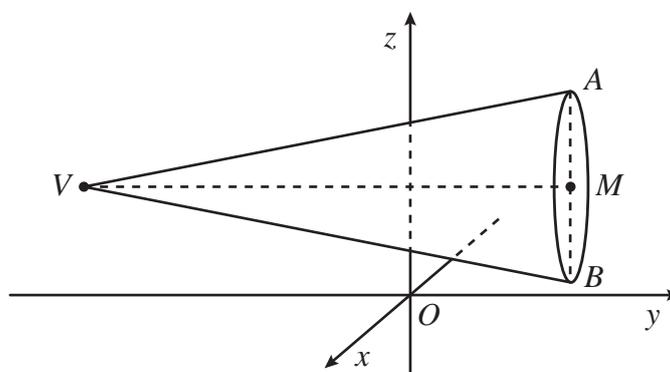


Figura 7

Nesta figura:

- $[MV]$  representa a altura do cone, e as coordenadas dos seus pontos são do tipo  $(5, y, 4)$  ;
- o ponto  $M$  tem ordenada igual a 21 .

Determine as coordenadas do ponto  $V$ .

- \* 10. Há formigas que, tendo saído do seu formigueiro, têm a percepção da distância horizontal a que estão do formigueiro, mesmo que no exterior tenham executado percursos complexos com subidas e descidas.

Uma formiga sobe por uma maçã, a partir do solo. Admita que a maçã é uma esfera, que a formiga é um ponto e que o percurso da formiga na superfície esférica é um arco de um círculo máximo da esfera, contido num plano vertical que passa pela entrada do formigueiro.

A situação está representada na Figura 8, que não está à escala.

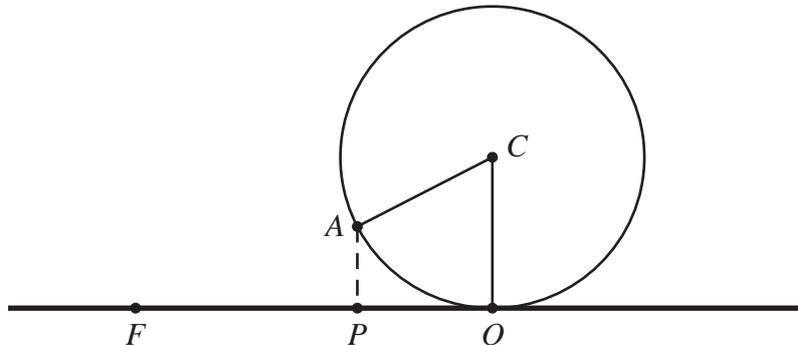


Figura 8

Nesta figura:

- a reta  $FO$  representa o solo, horizontal, sendo  $F$  a entrada do formigueiro e  $O$  o ponto de tangência da maçã com o solo, com  $\overline{FO} = 40$  cm ;
- a circunferência, de centro  $C$ , que passa em  $O$  e tem diâmetro  $7,2$  cm , representa o círculo máximo;
- o ponto  $A$ , pertencente à circunferência, representa a posição da formiga depois de percorrer a distância de  $3,77$  cm , correspondente ao comprimento do arco  $OA$  ;
- o ponto  $P$  é a projeção ortogonal de  $A$  sobre  $FO$  .

Determine a distância horizontal,  $\overline{FP}$ , a que a formiga está do formigueiro.

Apresente o resultado em centímetros, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, sempre que proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

**FIM**

**COTAÇÕES**

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.	3.1.	4.1.	4.2.1.	5.	8.	9.1.	10.	Subtotal
Cotação (em pontos)	20	16	16	16	16	16	20	16	16	152
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	3.2.	4.2.2.	6.	7.	9.2.					Subtotal
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									48
<b>TOTAL</b>										<b>200</b>

## Exame Final Nacional de Matemática B Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

### Critérios de Classificação

10 Páginas

#### CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Organização e linguagem científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por etapas, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização, nomeadamente, a representação, em referencial cartesiano, do(s) gráfico(s) visualizado(s).

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista (ver nota).
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.

13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.  As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada.  Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto:  – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos;  – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

**Nota** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

<b>1.</b>		<b>20 pontos</b>
	Identificar a função objetivo $(C(x, y) = 2x + 1,5y)$	1 ponto
	Identificar as restrições $0,4x + 0,6y \geq 140$ , $0,5x + 0,5y \geq 150$ , $0,6x + 0,4y \geq 140$ e $x + y \leq 350$ ..... (4 x 1)	4 pontos
	Identificar as restrições $x \geq 0$ e $y \geq 0$	1 ponto
	Representar graficamente a região admissível	5 pontos
	Representar graficamente as retas de equações $0,4x + 0,6y = 140$ , $0,5x + 0,5y = 150$ , $0,6x + 0,4y = 140$ e $x + y = 350$ ..... (4 x 1)	4 pontos
	Assinalar o polígono	1 ponto
	Obter as coordenadas dos vértices do polígono $((350, 0), (200, 100), (100, 200)$ e $(0, 350))$ ..... (4 x 1)	4 pontos
	Calcular o custo correspondente a cada um dos vértices do polígono (ou implementar o método da paralela à reta de nível zero – <b>ver nota</b> ) ..... (4 x 1)	4 pontos
	Apresentar os valores pedidos (100 embalagens do suplemento I e 200 embalagens do suplemento II).....	1 ponto
	<b>Nota</b> – No caso de ser implementado o método da paralela à reta de nível zero, se apenas for representada, corretamente, esta reta, a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto.	
<b>2.</b>		<b>16 pontos</b>
	Identificar as listas introduzidas na calculadora	1 ponto
	Apresentar os parâmetros da equação da reta de regressão linear $(-0,197$ e $227,119)$ ..... (4 + 4)	8 pontos
	Identificar $x$ com 160	4 pontos
	Obter o valor pedido (195,6 g)	3 pontos
<b>3.1.</b>		<b>16 pontos</b>
	Indicar a razão da progressão (2)	8 pontos
	Referir que a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos é constante (ou equivalente)	8 pontos

**3.2. .... 16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

- Obter os números de maçãs que apodreceram, por dia, do 3.º ao 12.º dia  
(5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 e 23) ..... 6 pontos
- Obter o número de maçãs que apodreceram durante os 12 dias (144) ..... 6 pontos
- Obter o valor pedido (180 maçãs) ..... 4 pontos

**2.º Processo**

- Reconhecer que os números de maçãs que apodreceram, por dia, são termos consecutivos de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 1 ..... 1 ponto
- Reconhecer que a razão dessa progressão é 2 ..... 1 ponto
- Escrever uma expressão que permita calcular o termo de ordem 12 ..... 3 pontos
- Obter o termo de ordem 12 (23) ..... 1 ponto
- Escrever  $\frac{1+23}{2} \times 12$  (ou equivalente) ..... 4 pontos
- Obter 144 ..... 2 pontos
- Obter o valor pedido (180 maçãs) ..... 4 pontos

**4.1. .... 16 pontos**

- Substituir  $T_0$  por 25 na expressão analítica de  $T$  ..... 3 pontos
- Calcular  $T(27)$  ..... 10 pontos

Esta etapa pode ser cumprida por, pelo menos, três processos.

**1.º Processo**

- Substituir  $x$  por 27 na expressão analítica de  $T$  ..... 5 pontos
- Obter  $T(27)$  (5,7...) ..... 5 pontos

**2.º Processo**

- Representar graficamente a função  $T$  (ver nota) ..... 5 pontos
- Obter  $T(27)$  (5,7...) ..... 5 pontos

**3.º Processo**

- Apresentar a linha da tabela correspondente a  $x = 27$  ..... 5 pontos
- Obter  $T(27)$  (5,7...) ..... 5 pontos

Concluir que as maçãs estão em condições de serem armazenadas ..... 3 pontos

**Nota** – Se não for representado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 2 pontos. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

**4.2.1. .... 16 pontos**

- Traduzir o problema por uma condição ( $T(x) < 7$ , ou equivalente)  
**(ver nota 1)** ..... 2 pontos
- Substituir  $T_0$  por 33 na expressão analítica de  $T$  ..... 3 pontos
- Resolver a inequação  $T(x) < 7$  ..... 10 pontos
- Esta etapa pode ser cumprida por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

- Representar graficamente a função  $T$  **(ver notas 2 e 3)** ..... 5 pontos
- Representar graficamente a reta de equação  $y = 7$   
**(ver nota 2)** ..... 2 pontos
- Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos ..... 1 ponto
- Obter a abcissa desse ponto (29,6262...) ..... 2 pontos

**2.º Processo**

- Isolar  $e^{-0,0432365x}$  ..... 3 pontos
- Escrever  $-0,0432365x < \ln\left(\frac{10}{36}\right)$  ..... 4 pontos
- Obter  $x > 29,6262...$  ..... 3 pontos
- Apresentar o valor pedido (30 min) ..... 1 ponto

**Notas:**

1. Se for apresentado  $T(x) = 7$ ,  $T(x) \leq 7$ ,  $T(x) > 7$  ou  $T(x) \geq 7$ , a pontuação a atribuir nesta etapa não é desvalorizada.
2. Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir nestes passos é desvalorizada em 2 pontos.
3. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir neste passo é desvalorizada em 1 ponto.

**4.2.2. .... 16 pontos**

- Identificar 16 com o instante em que decorreram 16 minutos desde o início do  
 banho de arrefecimento das maçãs ..... 4 pontos
- Referir que a temperatura das maçãs estava a diminuir ..... 6 pontos
- Referir que 0,78 corresponde a uma taxa de, aproximadamente,  
 0,78 °C/ min **(ver nota)** ..... 6 pontos

**Nota** – Se não for referido que 0,78 corresponde a um valor aproximado, a pontuação a atribuir nesta etapa não é desvalorizada.

**Exemplo de resposta:**

«16 minutos após o início do banho de arrefecimento, a temperatura das maçãs estava a diminuir cerca de 0,78 °C/ min.»

5. .... 16 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

- Identificar 55 com  $\mu - \sigma$  ..... 3 pontos
- Obter  $P(X > 55)$  ..... 7 pontos
- Calcular  $P(X > 55) \times 50\,000$  ..... 5 pontos
- Apresentar o valor pedido (42 milhares de maçãs) ..... 1 ponto

**2.º Processo**

- Determinar, com o auxílio da calculadora, um valor aproximado de  $P(X > 55)$  ..... 10 pontos
- Calcular  $P(X > 55) \times 50\,000$  ..... 5 pontos
- Apresentar o valor pedido (42 milhares de maçãs) ..... 1 ponto

6. .... 16 pontos

- Identificar o dia 1 de janeiro com  $x = 1$  ..... 2 pontos
- Obter  $S(1)$  (9,34978...) ..... 4 pontos
- Converter 7h 56min em horas ou converter 9,34978... h em horas e minutos ..... 2 pontos
- Obter a hora do pôr do sol ..... 4 pontos
- Obter o valor pedido (2h 17min) ..... 4 pontos

7. .... 16 pontos

- Calcular o peso médio das cinco maçãs (187,2 g) ..... 6 pontos
  - Calcular  $P(187,2)$  ..... 9 pontos
- Esta etapa pode ser cumprida por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

- Substituir  $x$  por 187,2 na expressão analítica de  $P$  ..... 5 pontos
- Obter  $P(187,2)$  (2,2855...) ..... 4 pontos

**2.º Processo**

- Representar graficamente a função  $P$  (**ver nota**) ..... 5 pontos
- Obter  $P(187,2)$  (2,2855...) ..... 4 pontos

Apresentar o valor pedido (2,29 €) ..... 1 ponto

**Nota** – Se não for representado o referencial, a pontuação a atribuir neste passo é desvalorizada em 2 pontos. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir neste passo é desvalorizada em 1 ponto.

**Tópicos de resposta**

- Justificação de que a função representada no gráfico A não pode ser a função  $h$ .

**Exemplos de resposta:**

- «No instante inicial do enchimento, o depósito estava vazio; logo, a altura era de 0 m. No gráfico A, a altura inicial é 2,5 m, pelo que este gráfico não pode representar a função  $h$ .»
- «A função representada no gráfico A não pode ser a função  $h$ , porque a função representada é decrescente, enquanto a função  $h$  é crescente.»

- Justificação de que a função representada no gráfico B não pode ser a função  $h$ .

**Exemplos de resposta:**

- «A função representada no gráfico B não pode ser a função  $h$ , porque, como o enchimento é feito a partir de uma torneira com caudal constante, e o depósito é cilíndrico, o gráfico de  $h$  é parte de uma reta.»
- «A função representada no gráfico B não pode ser a função  $h$ , porque, como o enchimento é feito a partir de uma torneira com caudal constante, e o depósito é cilíndrico, a taxa de variação instantânea da função  $h$  é constante, o que não acontece com a função representada.»

Parâmetros	Níveis	Descritores de desempenho	Pontuação
<b>A</b> Conteúdos	4	Apresenta, de forma completa, as duas justificações solicitadas.	16
	3	Apresenta, de forma completa, uma das justificações solicitadas e, de forma incompleta, a outra justificação.	12
	2	Apresenta, de forma completa, apenas uma das justificações solicitadas. OU Apresenta, de forma incompleta, as duas justificações solicitadas.	8
	1	Apresenta, de forma incompleta, apenas uma das justificações solicitadas.	4
<b>B</b> Organização e linguagem científica	2	Escreve um texto organizado e utiliza adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	4
	1	Escreve um texto com falhas na organização ou na utilização do vocabulário específico da Matemática.	2

9.1. .... 16 pontos

Reconhecer que o volume da forma é igual à diferença entre o volume,  $V_1$ , do cone de base de diâmetro  $[AB]$  e o volume,  $V_2$ , do cone de base de diâmetro  $[CD]$  ..... 2 pontos

Calcular  $V_1$  ..... 3 pontos

Indicar a altura (55) ..... 1 ponto

Obter o raio da base (11) ..... 1 ponto

Obter  $V_1$  ..... 1 ponto

Calcular  $V_2$  ..... 7 pontos

Reconhecer que, sendo  $E$  o ponto médio de  $[AB]$  e  $F$  o ponto médio de  $[CD]$ , os triângulos  $[VEB]$  e  $[VFD]$  são semelhantes ..... 2 pontos

Escrever  $\frac{11}{FD} = \frac{55}{45}$  (ou equivalente)

ou escrever  $\frac{22}{CD} = \frac{55}{45}$  (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter  $\overline{FD}$  (9) ..... 2 pontos

Obter  $V_2$  ..... 1 ponto

Obter o volume da forma ..... 1 ponto

Apresentar o valor pedido (3 litros) ..... 3 pontos

9.2. .... 16 pontos

Indicar a abcissa do ponto  $V$  (5) ..... 2 pontos

Indicar a cota do ponto  $V$  (4) ..... 2 pontos

Calcular a ordenada do ponto  $V$  ..... 12 pontos

Reconhecer que a ordenada do ponto  $M$  é  $\overline{KM}$ , sendo  $K$  o ponto de intersecção da altura do cone com o plano  $xOz$  ..... 3 pontos

Reconhecer que a altura do cone mede 55 cm ..... 1 ponto

Calcular  $55 - 21$  (34) ..... 4 pontos

Concluir que a ordenada do ponto  $V$  é  $-34$  ..... 4 pontos

10. .... 16 pontos

Escrever uma expressão para o comprimento do arco  $OA$  ..... 2 pontos

Obter o raio da circunferência  $(3,6)$  ..... 1 ponto

Igualar a expressão do comprimento do arco  $OA$  a  $3,77$  ..... 2 pontos

Obter  $\widehat{ACO}$  ..... 2 pontos

Escrever  $\sin(\widehat{ACO}) = \frac{\overline{AK}}{3,6}$

(ou equivalente, em que  $K \in [OC]$ , com  $\overline{AK} = \overline{PO}$ ) ..... 3 pontos

Obter  $\overline{PO}$  ..... 2 pontos

Reconhecer que  $\overline{FP} = \overline{FO} - \overline{PO}$  ..... 2 pontos

Obter o valor pedido  $(37 \text{ cm})$  ..... 2 pontos

### COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.	3.1.	4.1.	4.2.1.	5.	8.	9.1.	10.	Subtotal
Cotação (em pontos)	20	16	16	16	16	16	20	16	16	152
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	3.2.	4.2.2.	6.	7.	9.2.					Subtotal
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									48
<b>TOTAL</b>										<b>200</b>