REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

1. Uma empresa decidiu produzir dois tipos de concentrado de frutas, ambos feitos à base de maçã, pera e romã.

Cada quilograma de concentrado do tipo I é vendido a $2{,}50$ € e contém $0{,}45\ \mathrm{kg}$ de maçã, $0{,}40\ \mathrm{kg}$ de pera e $0{,}15\ \mathrm{kg}$ de romã.

Cada quilograma de concentrado do tipo II é vendido a $3{,}00$ € e contém $0{,}40\ \mathrm{kg}$ de maçã, $0{,}25\ \mathrm{kg}$ de pera e $0{,}35\ \mathrm{kg}$ de romã.

A empresa dispõe, diariamente, de $218{,}50\ \mathrm{kg}$ de maçã, de $168{,}15\ \mathrm{kg}$ de pera e de $140{,}00\ \mathrm{kg}$ de romã.

A empresa tem garantida a venda de toda a produção diária dos dois tipos de concentrado.

Quantos quilogramas de concentrado do tipo I e quantos quilogramas de concentrado do tipo II devem ser produzidos, diariamente, pela empresa, para que o valor de vendas do total dos dois concentrados seja máximo?

Na sua resposta, designe por x o número de quilogramas de concentrado do tipo I e por y o número de quilogramas de concentrado do tipo II a produzir, diariamente, pela empresa, e apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

2. O número de dias por semana em que se tem de regar o jardim depende essencialmente das condições meteorológicas. Nos meses de verão, o Sr. Ferreira tem de regar o jardim com muita frequência.

Seja X a variável aleatória «Número de dias, numa semana de verão, em que o Sr. Ferreira rega o jardim», com $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Admita que:

$$P(X=1)=0{,}01\,;\ P(X=2)=0{,}02\,;\ P(X=3)=0{,}05\,;\ P(X=4)=0{,}09\,;$$
$$P(X=5)=0{,}41\,;\ P(X=6)=0{,}21\,;\ P(X=7)=0{,}21\,.$$

Considera-se, ao acaso, uma semana de verão.

Qual é a probabilidade, de acordo com a variável aleatória X, de o Sr. Ferreira não regar o jardim nessa semana?

Justifique a sua resposta.

3. O neto do Sr. Ferreira está a treinar a escrita das letras maiúsculas. Para o ajudar nessa aprendizagem, o Sr. Ferreira desenhou, numa folha, círculos iguais e tangentes, dispostos como a Figura 1 sugere.

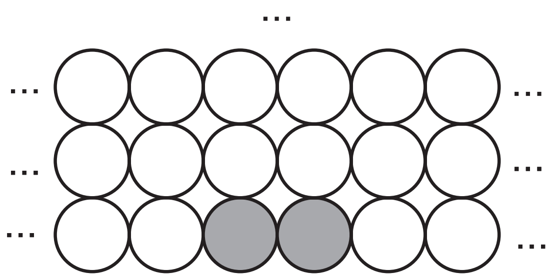

Figura 1

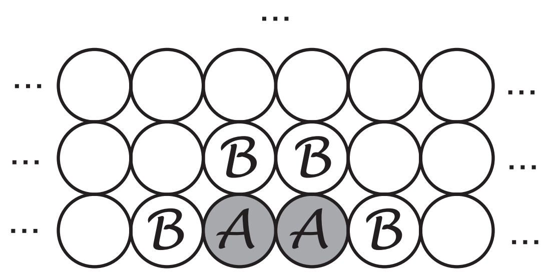

Figura 2

A atividade que o neto do Sr. Ferreira deve executar é a seguinte:

- começar por escrever a letra A nos dois círculos sombreados na Figura 1;
- de seguida, escrever a letra B em todos os círculos tangentes a algum dos dois círculos assinalados com a letra A, como se ilustra na Figura 2;
- e assim sucessivamente, seguindo o alfabeto, assinalando, para cada letra, todos os círculos tangentes a, pelo menos, um círculo que esteja assinalado com a letra anterior.

* **3.1.** Determine quantos círculos serão assinalados com a $15.^{a}$ letra do alfabeto.

3.2. Num certo momento da execução da atividade, o Sr. Ferreira verificou que o neto já tinha assinalado um total de 72 círculos.

Qual foi a letra escrita no $72.^{o}$ círculo?

Justifique a sua resposta.

4. Admita que a altura de uma árvore, h , em metros, t anos após ter sido plantada, é dada por

$$h(t)=\frac{13}{1+19{,}26e^{-0{,}58t}} \quad , \text{ com } t\geq 0$$

* **4.1.** Determine quantos centímetros cresceu a árvore durante o primeiro ano após ter sido plantada.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

*** 4.2.** Quanto tempo decorreu entre o instante em que a árvore foi plantada e o instante em que ultrapassou os 7 metros de altura, de acordo com o modelo apresentado?

Apresente o valor pedido em anos e meses, com o número de meses arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4.3. É possível esta árvore atingir $13{,}5$ metros de altura, de acordo com o modelo apresentado?

Justifique a sua resposta.

*** 5.** O gráfico da Figura 3 foi construído a partir de dados do Instituto Nacional de Estatística (INE) e diz respeito à produção total acumulada de batata de sequeiro em Portugal continental, de 2017 a 2021, desde o início de 2017.

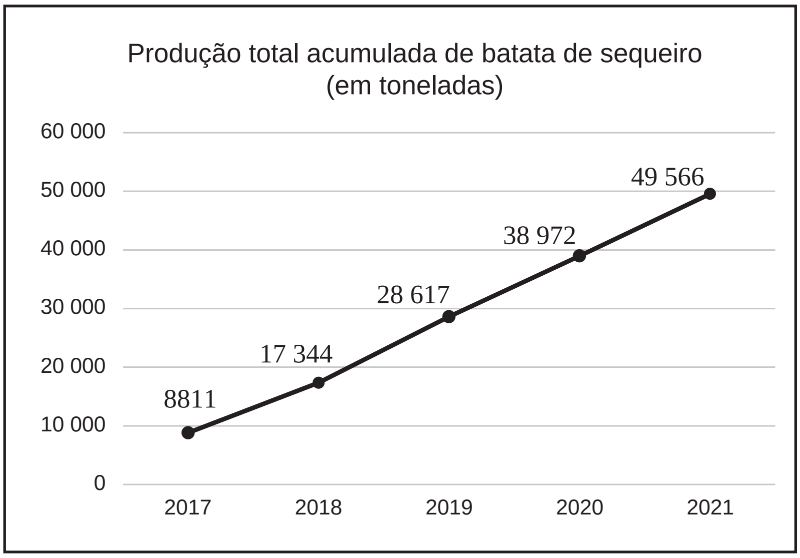

Figura 3

Para 2022, o INE previa uma redução de 15% da produção anual de batata de sequeiro relativamente à produção anual em 2021, em Portugal continental.

Determine o valor da produção anual de batata de sequeiro previsto pelo INE para 2022, em Portugal continental.

Apresente o valor pedido em milhares de toneladas, arredondado às unidades de milhar.

6. Na quinta do Sr. Ferreira, existe um depósito de água para rega. Considere que para se encher o depósito, que estava inicialmente vazio, se usou uma torneira com caudal constante.

Seja f a função que dá a altura, em metros, de água no depósito, t horas desde o instante em que se começou a encher o depósito, até ao instante em que ficou cheio, durante 6 horas.

Quando o depósito está cheio, a altura de água coincide com a altura do depósito.

Na Figura 4, está representado, em referencial ortogonal e monométrico, o gráfico da função f.

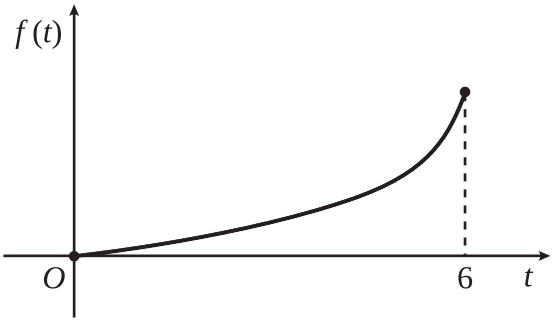

Figura 4

6.1. Em que instante a taxa de variação instantânea da função f tem maior valor:

em $t = 0{,}5$ ou em $t = 5{,}5$?

Justifique a sua resposta.

*** 6.2.** Na Figura 5, estão representados esquemas das formas de dois depósitos, na posição em que são enchidos.

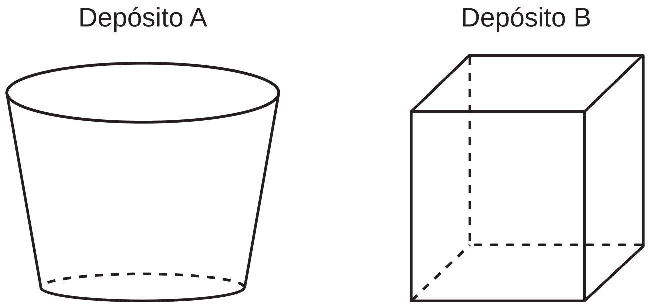

Figura 5

Justifique que nenhum desses depósitos pode ser o existente na quinta do Sr. Ferreira, apresentando uma razão para cada um dos depósitos.

7. Um biombo decorado com motivos geométricos, existente na casa da quinta do Sr. Ferreira, tem desenhadas circunferências no seu painel central, como se ilustra na Figura 6.

Na Figura 7, representa-se uma parte do painel central do biombo, que tem quatro dessas circunferências.

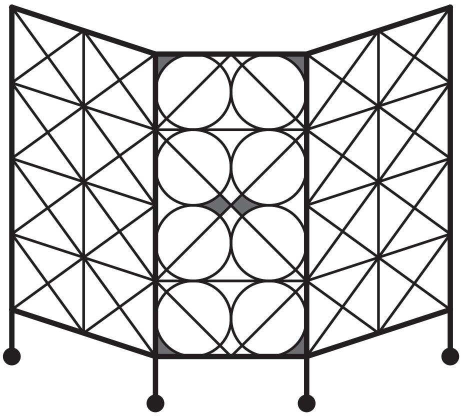

Figura 6

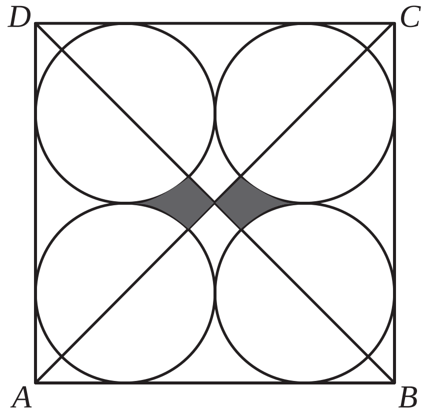

Figura 7

No esquema da Figura 7, que não está à escala, estão representados:

- um quadrado, $[ABCD]$;
- quatro circunferências geometricamente iguais, de raio igual a 10 cm , tangentes entre si e tangentes aos lados do quadrado;
- as duas diagonais do quadrado;
- duas regiões sombreadas, na zona central do quadrado.

7.1. Determine a área total das regiões sombreadas na zona central do quadrado representado na Figura 7.

Apresente o resultado em centímetros quadrados, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

*** 7.2.** Numa circunferência geometricamente igual às da Figura 7, fixou-se um referencial ortogonal e monométrico, Oxy , como se representa na Figura 8. No referencial, a unidade é o centímetro.

Nesta figura:

- o ponto P , centro da circunferência, tem coordenadas $(30, 40)$;
- o ponto Q pertence à circunferência e à reta OP .

Determine as coordenadas do ponto Q .

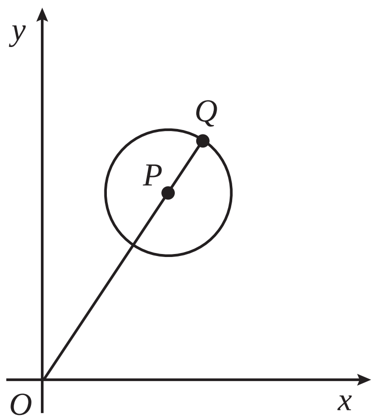

Figura 8

8. Os esquemas I e II, da Figura 9, mostram o modelo de uma das primeiras bicicletas, com as rodas assentes num solo plano e horizontal.

Com a bicicleta imobilizada, foram assinalados os pontos A e B, sendo A o ponto da roda traseira e B o ponto da roda dianteira que estão em contacto com o solo e à distância de 90 cm um do outro, como se sugere no esquema I.

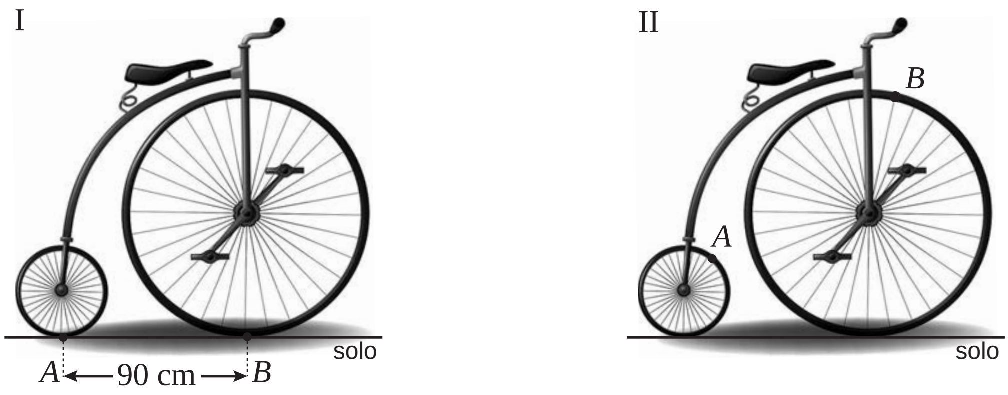

Figura 9

Posteriormente, a bicicleta foi posta em movimento durante 10 segundos. Sabe-se que andou em linha reta a uma velocidade constante, que as duas rodas se mantiveram num mesmo plano vertical, e que nenhuma das rodas derrapou, nem patinou, nem rodou para trás.

No esquema II, ilustra-se uma das posições dos pontos A e B durante esse movimento.

Considerando que a espessura dos pneus é desprezável, admita que, t segundos após a bicicleta ter sido posta em movimento, as distâncias ao solo, em centímetros, dos pontos A e B são dadas, respetivamente, por

$$a(t) = 20 - 20\cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \quad \text{e por} \quad b(t) = 62{,}5 - 62{,}5\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), \quad \text{com } 0 \leq t \leq 10$$

O argumento da função cosseno está em radianos.

8.1. Mostre que o raio da roda traseira mede 20 cm.

* **8.2.** Determine a distância entre os pontos A e B oito segundos após a bicicleta ter sido posta em movimento.

Na sua resposta, apresente o resultado em centímetros, arredondado às unidades.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**3.1.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.2.**	**7.2.**	**8.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	20	16	16	16	16	16	20	16	16	**152**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**3.2.**	**4.3.**	**6.1.**	**7.1.**	**8.1.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									**48**
TOTAL										**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Critérios de Classificação 10 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Organização e linguagem científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por etapas, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização, nomeadamente, a representação, em referencial cartesiano, do(s) gráfico(s) visualizado(s).

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista (ver nota).
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.

13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **20 pontos**

Identificar a função objetivo $\left(L(x,\ y) = 2{,}5x + 3y\right)$ .... 1 ponto

Identificar as restrições $0{,}45x + 0{,}40y \leq 218{,}50$, $0{,}40x + 0{,}25y \leq 168{,}15$ e $0{,}15x + 0{,}35y \leq 140$ ....(3 × 1)............................ 3 pontos

Identificar as restrições $x \geq 0$ e $y \geq 0$ .... 1 ponto

Representar graficamente a região admissível .... 5 pontos

Representar graficamente as retas de equações $0{,}45x + 0{,}40y = 218{,}50$, $0{,}40x + 0{,}25y = 168{,}15$ e $0{,}15x + 0{,}35y = 140$ ....(3 × 1).......................... 3 pontos

Assinalar a região admissível .... 2 pontos

Obter as coordenadas dos vértices do polígono, exceto a origem $((420{,}375;\ 0), (266;\ 247), (210;\ 310)$ e $(0;\ 400))$ ....(4 × 1)................ 4 pontos

Calcular o custo correspondente a cada um dos vértices do polígono, exceto a origem (ou implementar o método da paralela à reta de nível zero – **ver nota**) .... (4 × 1) .... 4 pontos

Apresentar os valores pedidos (210 kg de concentrado do tipo I e 310 kg de concentrado do tipo II).. 2 pontos

Nota – No caso de ser implementado o método da paralela à reta de nível zero, se apenas for representada, corretamente, esta reta, a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2. .... **16 pontos**

Identificar o valor pedido com $P(X = 0)$ .... 4 pontos

Reconhecer que $P(X = 0) = 1 - P(X > 0)$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Obter $0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}05 + 0{,}09 + 0{,}41 + 0{,}21 + 0{,}21 = 1$ .... 4 pontos

Concluir que a probabilidade pedida é 0 .... 4 pontos

3.1. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que os números de círculos assinalados em cada etapa são termos consecutivos de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 2 .... 3 pontos

Indicar a razão dessa progressão (2) .... 4 pontos

Escrever uma expressão que permita calcular o termo de ordem 15 .... 5 pontos

Obter o valor pedido (30 círculos) .... 4 pontos

2.º Processo

Obter o número de círculos que foram assinalados em cada etapa , da 1.ª à 14.ª $(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26$ e $28)$ .... 14 pontos

Apresentar o valor pedido (30 círculos) .... 2 pontos

3.2. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever uma expressão para o termo de ordem n
$\left(2+2(n-1)\right.$, ou equivalente$\left.\right)$ .... 3 pontos

Escrever uma expressão para a soma de n termos consecutivos
$\left(\frac{2+2+2(n-1)}{2}\times n\right.$, ou equivalente$\left.\right)$ .... 3 pontos

Igualar a expressão anterior a 72 .... 2 pontos

Resolver a equação $\frac{2+2+2(n-1)}{2}\times n = 72$ (ou equivalente) .... 5 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, três processos.

Processo A

Apresentar uma tabela com os primeiros oito termos da sucessão de termo geral n^2+n .... 3 pontos

Identificar o valor de n (8) .... 2 pontos

Processo B

Obter $n^2+n-72=0$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter $n=8$ .... 2 pontos

Processo C

Representar graficamente a função definida por $y=x^2+x$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y=72$ (**ver nota**) .... 1 ponto

Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos de abcissa positiva .... 1 ponto

Obter $n=8$ .... 1 ponto

Concluir que tinha sido escrita a letra H .... 3 pontos

Nota – Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir nestes passos é desvalorizada em 2 pontos.

2.º Processo

Indicar o número de círculos assinalados da 1.ª etapa à 8.ª etapa
$(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$ e $16)$ .... 8 pontos

Obter a soma desses números (72) .... 5 pontos

Concluir que tinha sido escrita a letra H .... 3 pontos

4.1. .... **16 pontos**

Identificar a altura da árvore no instante em que foi plantada com $h(0)$ .... 2 pontos

Identificar a altura da árvore um ano após ter sido plantada com $h(1)$ .... 2 pontos

Obter $h(0)$ $(0{,}641...)$ .... 2 pontos

Obter $h(1)$ $(1{,}103...)$ .... 2 pontos

Identificar o valor pedido com $h(1)-h(0)$ .... 5 pontos

Obter o valor pedido (46 cm) .... 3 pontos

4.2. .... **16 pontos**

Traduzir o problema por uma condição $(h(t)>7,$ ou equivalente$)$
(**ver nota 1**) .... 2 pontos

Resolver a inequação $h(t)>7$ .... 11 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Representar graficamente a função h (**ver notas 2 e 3**) .... 6 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y=7$
(**ver nota 2**) .... 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos .... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto $(5{,}3658...)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Isolar $e^{-0{,}58t}$ .... 4 pontos

Escrever $-0{,}58t<\ln 7$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Obter $t>5{,}3658...$ .... 3 pontos

Apresentar o valor pedido (5 anos e 4 meses) (**ver nota 4**) .... 3 pontos

Notas:

1. Se for apresentado $h(t)=7,$ $h(t)\geq 7,$ $h(t)<7$ ou $h(t)\leq 7,$ a pontuação a atribuir nesta etapa não é desvalorizada.

2. Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir nestes passos é desvalorizada em 2 pontos.

3. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir neste passo é desvalorizada em 1 ponto.

4. Se for apresentado 5 anos e 5 meses, a pontuação a atribuir nesta etapa não é desvalorizada.

4.3. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Reconhecer que a reta de equação $y = 13$ é assíntota horizontal ao gráfico da função h (**ver notas 1 e 2**) .... 8 pontos

Referir que a função h é crescente (**ver notas 1 e 2**) .... 6 pontos

Concluir que não é possível .... 2 pontos

Notas:

1. Em alternativa, pode apenas ser referido que a função h é uma função logística.

2. Se apenas forem representados o gráfico da função h e a reta de equação $y = 13$, a soma das pontuações a atribuir nestas etapas não deve ser desvalorizada.

2.º Processo

Escrever $h(t) = 13{,}5$ .... 3 pontos

Isolar $e^{-0{,}58t}$ .... 6 pontos

Concluir que a equação é impossível .... 5 pontos

Concluir que não é possível .... 2 pontos

3.º Processo

Escrever $e^{-0{,}58t} > 0$ .... 4 pontos

Escrever $19{,}26\, e^{-0{,}58t} > 0$ .... 3 pontos

Escrever $1 + 19{,}26\, e^{-0{,}58t} > 1$ .... 3 pontos

Reconhecer que $h(t) < 13$ .... 4 pontos

Concluir que não é possível .... 2 pontos

5. .... **16 pontos**

Identificar a produção anual em 2021 com a diferença $49\,566 - 38\,972$ .... 7 pontos

Obter a produção anual em 2021 $(10\,594)$ .... 2 pontos

Obter o valor pedido (9 milhares de toneladas) .... 7 pontos

6.1. .... **16 pontos**

Referir que a taxa de variação instantânea da função f tem maior valor no instante $t = 5{,}5$ .... 4 pontos

Referir que a altura da água no depósito estava a aumentar mais rapidamente no instante $t = 5{,}5$ do que no instante $t = 0{,}5$ (ou equivalente) OU Referir que o declive da reta tangente ao gráfico de h em $t = 5{,}5$ é maior do que o declive da reta tangente ao gráfico de h em $t = 0{,}5$ (ou equivalente) .... 12 pontos

6.2. .... **20 pontos**

Tópicos de resposta

• Justificação de que o depósito A não pode ser o existente na quinta do Sr. Ferreira.

Exemplo de resposta:

– «No depósito A, a subida da água seria mais rápida no início e mais lenta no final, ao contrário do que se representa no gráfico de f.»

• Justificação de que o depósito B não pode ser o existente na quinta do Sr. Ferreira.

Exemplos de resposta:

– «No depósito B, a água subiria a uma velocidade constante, diferentemente do que se representa no gráfico de f.»

– «O gráfico da função correspondente ao depósito B seria retilíneo.»

Parâmetros	Níveis	Descritores de desempenho	Pontuação
A Conteúdos	**4**	Apresenta, de forma completa, as duas justificações solicitadas.	16
	3	Apresenta, de forma completa, uma das justificações solicitadas e, de forma incompleta, a outra justificação.	12
	2	Apresenta, de forma completa, apenas uma das justificações solicitadas. OU Apresenta, de forma incompleta, as duas justificações solicitadas.	8
	1	Apresenta, de forma incompleta, apenas uma das justificações solicitadas.	4
B Organização e linguagem científica	**2**	Escreve um texto organizado e utiliza adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	4
	1	Escreve um texto com falhas na organização ou na utilização do vocabulário específico da Matemática.	2

7.1. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Considerar um quadrado de lado 20 cm .... 3 pontos

Obter a área desse quadrado (400) .... 1 ponto

Obter a área de um círculo de raio 10 cm $(314{,}159\ldots)$ .... 3 pontos

Obter a diferença entre as duas áreas $(85{,}840\ldots)$ .... 4 pontos

Obter metade desta diferença $(42{,}920\ldots)$ .... 4 pontos

Apresentar o valor pedido (43 cm^2) .... 1 ponto

2.º Processo

Considerar um quadrado de lado 10 cm .... 3 pontos

Obter a área desse quadrado (100) .... 1 ponto

Obter a área de um quarto de círculo de raio 10 cm $(78{,}539\ldots)$ .... 3 pontos

Obter a diferença entre as duas áreas $(21{,}460\ldots)$ .... 4 pontos

Obter o dobro desta diferença $(42{,}920\ldots)$ .... 4 pontos

Apresentar o valor pedido (43 cm^2) .... 1 ponto

7.2. .... **16 pontos**

Escrever $\overline{OP}^2 = 30^2 + 40^2$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $\overline{OP}$ (50) .... 1 ponto

Reconhecer que as coordenadas do ponto Q se obtêm utilizando uma semelhança de triângulos .... 1 ponto

Escrever uma proporção que permita obter a abcissa do ponto Q .... 4 pontos

Obter o valor dessa abcissa (36) .... 2 pontos

Escrever uma proporção que permita obter a ordenada do ponto Q .... 4 pontos

Obter o valor dessa ordenada (48) .... 2 pontos

8.1. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que a distância mínima do ponto A ao solo é 0 cm .... 3 pontos

Representar graficamente a função a (**ver nota**) .... 4 pontos

Assinalar um ponto do gráfico cuja ordenada seja o valor máximo da função a .... 4 pontos

Obter a ordenada desse ponto (40) .... 2 pontos

Concluir que o raio da roda é 20 cm .... 3 pontos

Nota – Se for representada uma restrição da função a num intervalo de extremos 0 e m, com $0 < m \leq 10$, que permita visualizar um ponto relevante para a resolução do problema, a pontuação a atribuir nesta etapa não é desvalorizada. Se for representado um prolongamento da função a, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto. Se não for representado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 2 pontos.

2.º Processo

Referir que o argumento da função cosseno toma valores de um intervalo com amplitude superior a 2π .... 1 ponto

Escrever $-1 \leq \cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \leq 1$ .... 5 pontos

Escrever $-20 \leq -20\cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \leq 20$ .... 4 pontos

Escrever $0 \leq 20 - 20\cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \leq 40$ .... 3 pontos

Concluir que o raio da roda é 20 cm .... 3 pontos

8.2. .... **16 pontos**

Identificar a distância do ponto A ao solo com $a(8)$ .... 1 ponto

Obter $a(8)$ (20) .... 2 pontos

Reconhecer que, após 8 segundos, o ponto A se situa no extremo esquerdo do diâmetro da roda traseira, paralelo ao solo (**ver nota**) .... 4 pontos

Identificar a distância do ponto B ao solo com $b(8)$ .... 1 ponto

Obter $b(8)$ (0) .... 2 pontos

Considerar o triângulo retângulo $[APB]$, sendo P a projeção ortogonal do ponto A sobre o solo .... 1 ponto

Obter $\overline{PB}$ (110) .... 1 ponto

Escrever $\overline{AB}^2 = 110^2 + 20^2$ .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $(112$ cm$)$ .... 2 pontos

Nota – Se for considerado que o ponto A se situa no extremo direito do diâmetro da roda traseira, paralelo ao solo, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 2 pontos.

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.	3.1.	4.1.	4.2.	5.	6.2.	7.2.	8.2.	Subtotal
Cotação (em pontos)	20	16	16	16	16	16	20	16	16	**152**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**3.2.**	**4.3.**	**6.1.**	**7.1.**	**8.1.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									**48**
TOTAL										**200**