REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2024

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-1, 3]$.

Qual é o contradomínio da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x-2)+1$?

(A) $[-3, 1]$ **(B)** $[-2, 2]$

(C) $[0, 4]$ **(D)** $[1, 5]$

2. Uma orquestra está a realizar audições para novos instrumentistas.

2.1. No primeiro dia das audições, participaram apenas candidatos a flautistas e a violinistas.

Sabe-se que:

- $\frac{3}{5}$ dos candidatos eram violinistas;
- o número de candidatos estrangeiros era igual ao número de candidatos portugueses;
- $\frac{3}{10}$ dos candidatos estrangeiros eram flautistas.

Seleciona-se, ao acaso, um dos candidatos que participaram no primeiro dia das audições.

Determine a probabilidade de esse candidato ser português, sabendo-se que é violinista.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Enquanto aguardam as audições, quatro violinistas, um violoncelista e três contrabaixistas vão sentar-se nas duas primeiras filas de uma plateia, tendo cada fila quatro lugares numerados de 1 a 4.

Qual das expressões seguintes representa o número de maneiras diferentes de dispor os oito músicos, ficando os três contrabaixistas numa fila?

(A) ${}^4C_3 \times 3! \times 5!$ **(B)** $2 \times {}^4A_3 \times 5!$

(C) $2 \times {}^4C_3 \times 5!$ **(D)** ${}^4A_3 \times 3 \times 5!$

2.3. Para se preparar para a audição de violino, a Constança praticou durante m dias.

Sabe-se que a Constança praticou:

- em cada dia, exceto no primeiro, sempre mais 10 minutos do que no dia anterior;
- 60 minutos no quarto dia;
- 2970 minutos no total dos m dias.

Determine o valor de m.

3. Na Figura 1, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma reto $[ABCDEFGH]$, de bases $[ABCD]$ e $[EFGH]$.

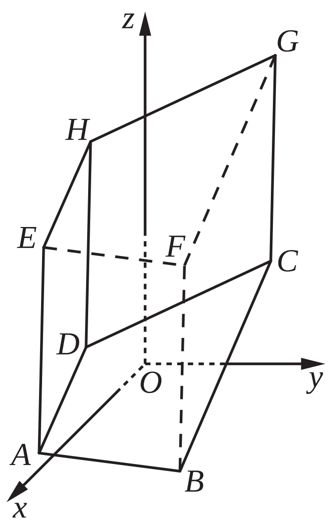

Figura 1

Sabe-se que:

- as bases do prisma são trapézios retângulos;
- o ponto A tem coordenadas $(4, -4, -3)$, e o ponto B tem a ordenada igual ao dobro da abcissa;
- uma equação da reta BC é $(x, y, z) = (3, 5, 1) + k(2, 3, 6), \quad k \in \mathbb{R}$.

* **3.1.** Qual das equações seguintes é uma equação do plano ABF ?

(A) $2x + 3y + 6z + 22 = 0$ **(B)** $2x + 3y + 6z - 20 = 0$

(C) $3x - 2y - 20 = 0$ **(D)** $3x - 2y + 22 = 0$

* **3.2.** Determine, sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, a amplitude do ângulo convexo AOB.

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

3.3. Selecionam-se, ao acaso, dois vértices de cada uma das bases do prisma.

Determine a probabilidade de os quatro vértices selecionados não pertencerem a uma mesma face lateral do prisma.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

4. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine o conjunto dos números reais que verificam a condição $\ln^2 x - \ln x - 2 < 0$.

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.

5. Considere, para um certo valor de k real, a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x}{e^{x-1} - 1} - e^{x-k} & \text{se } x < 1 \\ \\ x^2 - 3x - 2\ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** sem recorrer à calculadora.

* **5.1.** Estude, no intervalo $]1, +\infty[$, a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

* **5.2.** Sabe-se que a função g é contínua em $x = 1$.

Determine o valor de k.

*** 6.** O gráfico da Figura 2 apresenta a distribuição das classificações finais, em valores, na disciplina de Português, dos 20 alunos de uma turma.

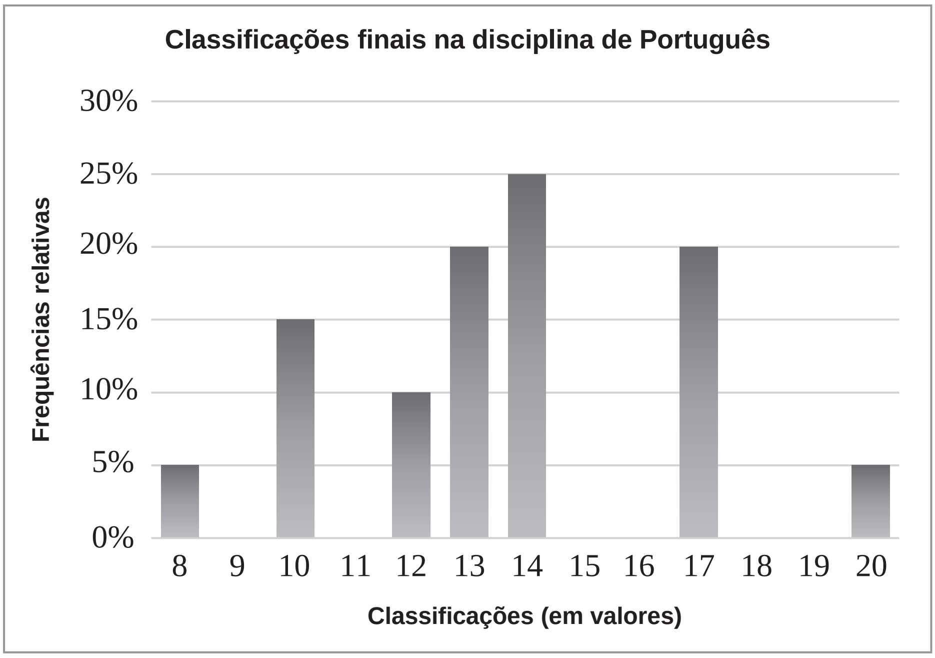

Figura 2

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados representados no gráfico da Figura 2.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Na turma, há ____**I**____ alunos com classificação final inferior a 13 valores na disciplina de Português.

A mediana da distribuição das classificações finais na disciplina de Português é ____**II**____ valores.

A classificação média final na disciplina de Português é ____**III**____ valores, e o desvio padrão desta distribuição, arredondado às décimas, é ____**IV**____ valores.

I	II	III	IV
a) 4	**a)** 12,5	**a)** 13,4	**a)** 2,9
b) 6	**b)** 13	**b)** 13,6	**b)** 3,8
c) 10	**c)** 13,5	**c)** 13,8	**c)** 4,1

7. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^4}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais ao seu gráfico e, caso existam, escreva as respetivas equações.

* **8.** Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- para qualquer número real a, $a \neq 2$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$;
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$, com $f(2) > 0$, e $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$;
- $f(1) \times f(3) < 0$.

Considere as proposições seguintes.

I. O teorema de Bolzano-Cauchy permite afirmar que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]1, 3[$.

II. A reta de equação $x = 2$ é assíntota ao gráfico da função $\frac{1}{f}$.

Justifique que as proposições **I** e **II** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

9. Na Figura 3, estão representadas, em referencial o.n. Oxy, a circunferência de centro em O e raio 2 e uma região sombreada composta pelo trapézio $[OBCD]$, retângulo em C e em D, e pelo sector circular correspondente ao ângulo orientado AOB, de amplitude α, em radianos, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, e raio $\overline{OA}$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência e ao semieixo positivo Ox;
- os pontos B e C pertencem à circunferência, sendo C o simétrico de B, em relação ao eixo Oy.

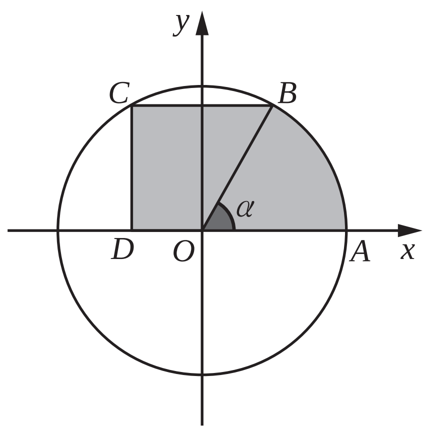

Figura 3

Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de α, pela expressão

$$2\alpha + 3\,\text{sen}\,(2\alpha)$$

✱ 10. Na Figura 4, está representada uma caixa que vai ser puxada ao longo de um plano horizontal, com recurso a uma haste rígida.

Nesta figura, o segmento de reta $[AB]$ representa a haste rígida, o ponto A representa o ponto em que a haste está fixada à caixa, e o ponto B representa o ponto em que vai ser exercida a força que permite deslocar a caixa.

Seja θ a amplitude, em radianos, do ângulo que a força faz com a horizontal $\left(\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

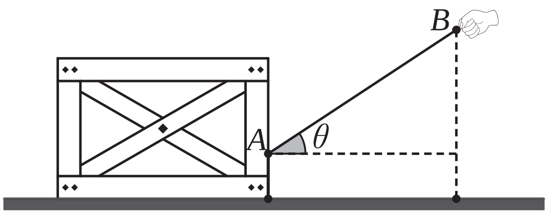

Figura 4

Admita que, para cada valor de θ, a intensidade mínima da força a aplicar no ponto B, para que se inicie o movimento da caixa, é dada, em newton, por

$$F(\theta) = \frac{4095}{5\,\text{sen}\,\theta + 12\cos\theta}$$

Existem dois valores distintos de θ aos quais corresponde a mesma intensidade mínima da força, em newton, a aplicar no ponto B, para que se inicie o movimento da caixa.

Sabe-se que um desses valores é o dobro do outro.

Seja θ_1 o menor desses valores $\left(\theta_1 \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\right)$.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor de θ_1.

Apresente o resultado em radianos, arredondado às centésimas.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

✱ 11. Na Figura 5, está representado, no plano complexo, o triângulo $[ABC]$, cujos vértices pertencem à circunferência de raio 2 centrada na origem do referencial, sendo o ponto A pertencente ao semieixo imaginário negativo.

Os pontos A, B e C são os afixos das raízes cúbicas de um certo número complexo, w.

Em qual das seguintes opções se apresenta w, escrito na forma trigonométrica?

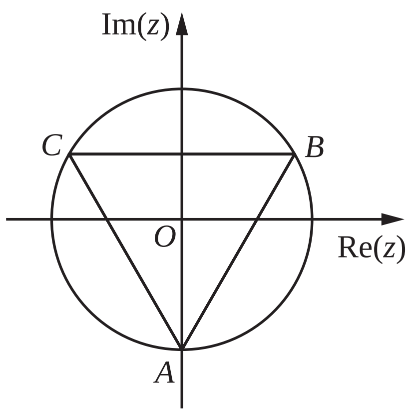

Figura 5

(A) $2e^{i\frac{\pi}{2}}$ **(B)** $2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

(C) $8e^{i\frac{\pi}{2}}$ **(D)** $8e^{i\frac{3\pi}{2}}$

12. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z = \frac{4}{1+i} - \frac{2}{i^7}$.

Determine o número complexo w tal que o número complexo $z \times w$ tenha módulo $5\sqrt{2}$ e afixo pertencente à bissetriz do terceiro quadrante.

Apresente w na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

* **13.** Para certos valores reais de b e de m, não nulos, a reta de equação $y = mx + 1$ é tangente ao gráfico da função quadrática definida por $f(x) = 2x^2 + bx + 5$ num ponto cuja abcissa é positiva.

Determine a abcissa desse ponto.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**8.**	**10.**	**11.**	**13.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	12	14	14	14	12	14	14	12	14	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.3.**		**3.3.**		**4.**		**7.**		**9.**		**12.**		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												**42**
TOTAL													**200**

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2024

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Critérios de Classificação 12 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

As respostas aos itens de seleção podem ser classificadas de forma dicotómica ou por níveis de desempenho, de acordo com os critérios específicos. No primeiro caso, a pontuação só é atribuída às respostas corretas, sendo todas as outras respostas classificadas com zero pontos. No caso da classificação por níveis de desempenho, a cada nível corresponde uma dada pontuação, de acordo com os critérios específicos.

Nas respostas aos itens de seleção, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra ou do número correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Linguagem Científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por etapas, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de classificação definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção cujos critérios se apresentam organizados por etapas.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **12 pontos**

(C)

2.1. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

Designemos por A o acontecimento «o candidato é violinista» e por B o acontecimento «o candidato é português».

1.º Processo

Apresentar uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam:
A e $\overline{A}$; B e $\overline{B}$ .... 1 ponto

Identificar o valor pedido com $P(B|A)$ .... 1 ponto

Reconhecer que $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(A)$ $\left(\frac{3}{5}\right)$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(B)$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(\overline{B})$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

Reconhecer que $P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{3}{10}$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ $\left(\frac{3}{20}\right)$ .... 2 pontos

Preencher a célula da tabela relativa a $P(A \cap B)$ $\left(\frac{1}{4}\right)$ .... 3 pontos

Obter o valor pedido $\left(\frac{5}{12}\right)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $P(A) = \frac{3}{5}$ .... 1 ponto

Reconhecer que $P(\overline{B}) = P(B)$ .... 1 ponto

Escrever $P(\overline{B}) = \frac{1}{2}$ .... 1 ponto

Escrever $P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{3}{10}$ .... 1 ponto

Identificar o valor pedido com $P(B|A)$ .... 1 ponto

Reconhecer que $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ .... 1 ponto

Obter $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{3}{20}$ .... 2 pontos

Reconhecer que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B})$ .... 1 ponto

Obter $P(A \cup B) = \frac{17}{20}$ .... 1 ponto

Obter $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ .... 2 pontos

Obter o valor pedido $\left(\frac{5}{12}\right)$ .... 2 pontos

2.2. .... **12 pontos**

(B)

2.3. .... **14 pontos**

Reconhecer que os tempos de prática, em minutos, da Constança, em cada um dos dias, são termos consecutivos de uma progressão aritmética, (u_n), de razão 10 .... 2 pontos

Reconhecer que $u_4 = u_1 + 30$ .... 2 pontos

Obter $u_1 = 30$ .... 1 ponto

Escrever $u_m = 20 + 10m$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Reconhecer que 2970 é a soma de m termos consecutivos de (u_n) .... 2 pontos

Escrever $2970 = \frac{10m + 50}{2} \times m$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter o valor pedido (22) .... 2 pontos

3.1. .... **12 pontos**

(A)

3.2. .... **14 pontos**

Reconhecer que as coordenadas do ponto B são da forma $(a, 2a, b)$ .... 1 ponto

Determinar as coordenadas do ponto B $((1, 2, -5))$ .... 2 pontos

Escrever as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$ .... 1 ponto

Escrever as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OB}$ .... 1 ponto

Calcular $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ (11) .... 2 pontos

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{OA}$ $(\sqrt{41})$ .... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{OB}$ $(\sqrt{30})$ .... 1 ponto

Escrever $11 = \sqrt{41} \times \sqrt{30} \times \cos(A\hat{O}B)$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter o valor pedido (72°) .... 2 pontos

3.3. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis $\left({}^4C_2 \times {}^4C_2\right)$ .... 6 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis $\left(4 \times \left({}^4C_2 - 1\right) + 2 \times {}^4C_2\right)$ ...(3 + 3)... 6 pontos

Obter o valor pedido $\left(\frac{8}{9}\right)$ (**ver nota**) .... 2 pontos

2.º Processo

Reconhecer que a probabilidade pedida é a probabilidade do acontecimento contrário ao acontecimento «os quatro vértices selecionados pertencem a uma mesma face lateral do prisma» .... 2 pontos

Calcular a probabilidade de os quatro vértices pertencerem a uma mesma face lateral do prisma .... 10 pontos

Apresentar o número de casos possíveis $\left({}^4C_2 \times {}^4C_2\right)$ .... 4 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis (4) .... 4 pontos

Obter a probabilidade $\left(\frac{1}{9}\right)$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Obter o valor pedido $\left(\frac{8}{9}\right)$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Nota – Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação de 0 pontos deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0, 1]$.

4. .... **14 pontos**

Reconhecer que o domínio de resolução da condição é $]0, +\infty[$ .... 1 ponto

Obter $\ln x > -1 \ \wedge \ \ln x < 2$ .... 9 pontos

Escrever $\ln^2 x - \ln x - 2 = 0$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $\ln x = -1 \ \vee \ \ln x = 2$ .... 3 pontos

Concluir que $\ln x \in]-1, 2[$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Obter $x > e^{-1} \ \wedge \ x < e^2$ .... 2 pontos

Apresentar o conjunto pedido $\left(\left]\frac{1}{e}, e^2\right[\text{, ou equivalente}\right)$ .... 2 pontos

5.1. .... **14 pontos**

Determinar $g'(x)$ em $]1, +\infty[$ (**ver nota 1**) .... 3 pontos

Escrever $g'(x) = 0$ .... 1 ponto

Determinar o zero de g' em $]1, +\infty[$ .... 2 pontos

Apresentar um quadro de sinal de g' e de monotonia de g no intervalo $]1, +\infty[$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Apresentar os intervalos de monotonia de g em $]1, +\infty[$ (**ver nota 2**) .... 2 pontos

Reconhecer que $g(2)$ é um extremo relativo .... 1 ponto

Determinar $g(2)$ $\left(-2 - 2\ln 2, \text{ ou equivalente}\right)$ .... 1 ponto

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

2. Se for referido que a função g é decrescente em $]1, 2[$, em vez de $]1, 2]$, e crescente em $]2, +\infty[$, em vez de $[2, +\infty[$, esta etapa deve ser considerada cumprida.

5.2. .... **14 pontos**

Reconhecer que $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ $\left(\text{ou } \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = g(1)\right)$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ $\left(\text{ou } g(1)\right)$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(x^2 - 3x - 2\ln x\right)$ $\left(\text{ou substituir } x \text{ por } 1 \text{ na expressão } x^2 - 3x - 2\ln x\right)$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = -2$ $\left(\text{ou } g(1) = -2\right)$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$ .... 9 pontos

Reconhecer que $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(\dfrac{1-x}{e^{x-1}-1} - e^{x-k}\right)$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\dfrac{1-x}{e^{x-1}-1} - e^{x-k}\right) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1-x}{e^{x-1}-1} - \lim\limits_{x \to 1^-} e^{x-k}$ .. 1 ponto

Escrever

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1-x}{e^{x-1}-1} - \lim\limits_{x \to 1^-} e^{x-k} \underset{y = x-1}{=} \lim\limits_{y \to 0^-} \dfrac{-y}{e^{y}-1} - e^{1-k}$ .... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{y \to 0^-} \dfrac{-y}{e^{y}-1} - e^{1-k} = -\dfrac{1}{\lim\limits_{y \to 0^-} \dfrac{e^{y}-1}{y}} - e^{1-k}$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -1 - e^{1-k}$ .... 2 pontos

Escrever $-1 - e^{1-k} = -2$ .... 1 ponto

Obter o valor de k (1) .... 1 ponto

6. .... **12 pontos**

I → b) **II → c)** **III → b)** **IV → a)**

Este item deve ser classificado de acordo com os níveis de desempenho seguintes.

Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
3	Completa o texto com as 4 opções corretas.	12
2	Completa o texto com 3 opções corretas.	8
1	Completa o texto com 2 opções corretas.	4

7. .... **14 pontos**

Justificar que apenas a reta de equação $x = 0$ pode ser assíntota vertical ao gráfico da função f .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ .... 11 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^4}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^4 (1 + \cos x)}$ .... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^4 (1 + \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^4 (1 + \cos x)}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^4 (1 + \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^4 (1 + \cos x)}$ .... 1 ponto

Escrever

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^4 (1 + \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} \times \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2 (1 + \cos x)}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} = \left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}\right)^2$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} = 1$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2 (1 + \cos x)} = +\infty$ .... 1 ponto

Concluir que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ .... 1 ponto

Concluir que a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f .... 2 pontos

8. .... **14 pontos**

Tópicos de resposta

- Justificação da falsidade da proposição **I**.
  Exemplo: A função f não é contínua no intervalo $[1, 3]$, pois $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ não existe (ou a função f não é contínua em $x = 2$). Portanto, não é possível concluir que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]1, 3[$ por aplicação do teorema de Bolzano-Cauchy.

- Justificação da falsidade da proposição **II**.
  Exemplo: Como $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(2)}$ e $\frac{1}{f(2)}$ é um número real, e como $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{f(x)} = 0$, a reta de equação $x = 2$ não é assíntota ao gráfico da função $\frac{1}{f}$.

Parâmetro	Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
A Conteúdos	**4**	Apresenta, de forma completa, as duas justificações solicitadas.	12
	3	Apresenta, de forma completa, uma das justificações solicitadas e, de forma incompleta, a outra justificação.	9
	2	Apresenta, de forma completa, apenas uma das justificações solicitadas. OU Apresenta, de forma incompleta, as duas justificações solicitadas.	6
	1	Apresenta, de forma incompleta, apenas uma das justificações solicitadas.	3
B Linguagem Científica	**2**	Utiliza adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	2
	1	Utiliza, embora com uma ou mais falhas, o vocabulário específico da Matemática.	1

9. .... **14 pontos**

Reconhecer que a área do trapézio $[OBCD]$ é dada por $\frac{\overline{BC} + \overline{DO}}{2} \times \overline{CD}$ ... 1 ponto

Reconhecer que a abcissa do ponto B é $2 \cos \alpha$ .... 1 ponto

Reconhecer que a ordenada do ponto B é $2 \operatorname{sen} \alpha$ .... 1 ponto

Reconhecer que a abcissa do ponto C é $-2 \cos \alpha$ .... 1 ponto

Reconhecer que a abcissa do ponto D é $-2 \cos \alpha$ .... 1 ponto

Obter $\overline{BC}$ em função de α .... 2 pontos

Escrever $\overline{DO}$ em função de α .... 1 ponto

Reconhecer que a altura do trapézio é igual a $2 \operatorname{sen} \alpha$ .... 1 ponto

Escrever uma expressão para a área do trapézio em função de α .... 1 ponto

Escrever uma expressão para a área do sector circular em função de α .... 1 ponto

Obter a expressão pretendida .... 3 pontos

10. .... **14 pontos**

Reconhecer que $2\theta_1$ é a amplitude do maior dos dois valores distintos de θ ... 2 pontos

Apresentar a equação $F(\theta) = F(2\theta)$ (ou uma equação equivalente) (**ver nota 1**) .... 3 pontos

Representar o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Assinalar o ponto relevante .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $(0{,}26 \text{ rad})$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, desde que seja inequívoco que correspondem à resolução de uma equação que traduz corretamente o problema.

2. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

11. .... **12 pontos**

(C)

12. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar i^7 com $-i$ .... 1 ponto

Obter $z = 2 - 4i$ .... 3 pontos

Escrever $z \times w = 5\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$ .... 3 pontos

Obter $z \times w = -5 - 5i$ .... 3 pontos

Escrever $w = \dfrac{-5-5i}{2-4i}$ .... 1 ponto

Obter $w = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i$ .... 3 pontos

2.º Processo

Seja $w = a + bi$.

Identificar i^7 com $-i$ .... 1 ponto

Obter $z = 2 - 4i$ .... 3 pontos

Obter $z \times w = 2a + 4b + i(2b - 4a)$ .... 1 ponto

Escrever $2a + 4b = 2b - 4a$ .... 1 ponto

Obter $b = -3a$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter $z \times w$, com a parte real e com a parte imaginária em função de a (ou em função de b) .... 2 pontos

Obter $|z \times w|$ em função de a (ou em função de b) .... 2 pontos

Obter o valor de a e o valor de b .... 2 pontos

Escrever o número complexo w $\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)$ .... 1 ponto

13. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Seja a a abcissa do ponto de tangência.

Obter $f'(x)$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Reconhecer que $m = f'(a)$ .... 2 pontos

Obter $f'(a) = 4a + b$ .... 1 ponto

Escrever $2a^2 + ba + 5 = (4a + b)a + 1$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Resolver a equação anterior .... 3 pontos

Apresentar o valor pedido $(\sqrt{2})$ .... 2 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

2.º Processo

Reconhecer que a reta é tangente ao gráfico de f se a equação $2x^2 + bx + 5 = mx + 1$ tiver apenas uma solução .... 3 pontos

Obter $2x^2 + (b - m)x + 4 = 0$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Escrever $(b - m)^2 - 32 = 0$ .... 3 pontos

Obter $b - m = -\sqrt{32} \lor b - m = \sqrt{32}$ .... 2 pontos

Obter $x = -\sqrt{2} \lor x = \sqrt{2}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $(\sqrt{2}$, ou equivalente$)$ .... 2 pontos

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.</td><td>2.1.</td><td>2.2.</td><td>3.1.</td><td>3.2.</td><td>5.1.</td><td>5.2.</td><td>6.</td><td>8.</td><td>10.</td><td>11.</td><td>13.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>158</td></tr>
<tr><td>Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">2.3.</td><td colspan="2">3.3.</td><td colspan="2">4.</td><td colspan="2">7.</td><td colspan="2">9.</td><td colspan="2">12.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="12">3 × 14 pontos</td><td>42</td></tr>
<tr><td colspan="13">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>