

Exame Final Nacional de Matemática A
Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2025
12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As citações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

* 1. Qual é o limite da sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$?

- (A) $e + 3$ (B) $3e$ (C) e^3 (D) $\frac{e}{3}$

2. Seja g a função, de domínio $]-\infty, \pi]$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{1 - \sqrt{1-x}} & \text{se } x < 0 \\ 2 \sin^2 x - \sqrt{3}x + 2 & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Resolva os itens 2.1. e 2.2. sem recorrer à calculadora.

* 2.1. Averigue se a função g é contínua em $x = 0$.

* 2.2. Estude, no intervalo $]0, \pi]$, a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

Na sua resposta, apresente os intervalos de monotonia e os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

* 3. O produto do segundo elemento pelo penúltimo elemento de uma dada linha do triângulo de Pascal é 625. Qual é o quinto elemento da linha anterior?

- (A) 10 626 (B) 12 650 (C) 42 504 (D) 53 130

4. Uma academia de dança oferece as modalidades de *ballet* clássico e de dança contemporânea, entre outras.

Relativamente aos alunos que frequentam a academia, sabe-se que:

- 60% estão inscritos em *ballet* clássico;
- 25% estão inscritos em dança contemporânea e não estão inscritos em *ballet* clássico;
- metade dos inscritos em dança contemporânea também estão inscritos em *ballet* clássico.

Selecionou-se, ao acaso, um aluno da academia que não está inscrito em dança contemporânea.

Determine a probabilidade de esse aluno estar inscrito em *ballet* clássico.

Apresente o resultado na forma de dízima.

- * 5. Na tabela seguinte, apresentam-se os dados relativos ao diâmetro biparietal, x , em centímetros, medido na trigésima quarta semana de gravidez, e ao correspondente perímetro cefálico, y , em centímetros, medido à nascença, de uma amostra de oito recém-nascidos numa maternidade.

Diâmetro biparietal em cm (x)	Perímetro cefálico em cm (y)
7,49	30,36
7,81	31,99
8,21	33,66
8,30	35,26
8,66	35,51
8,76	34,86
9,04	35,30
9,24	37,63

Complete o texto seguinte, seleccionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, seleccionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A mediana dos diâmetros biparietais apresentados excede a respetiva média, arredondada às centésimas, em **I** cm.

A amplitude da amostra dos perímetros cefálicos apresentados é **II** cm.

O coeficiente de correlação linear entre as variáveis x e y , apresentadas na tabela, arredondado às centésimas, é **III** .

Admitindo a validade do modelo de regressão linear de y em função de x , e com base nas estimativas dos parâmetros, arredondadas às milésimas, para um recém-nascido, nesta maternidade, cujo diâmetro biparietal na trigésima quarta semana de gravidez tenha sido 8,50 cm, estima-se que o perímetro cefálico à nascença seja, aproximadamente, **IV** cm.

I	II	III	IV
a) 0,04	a) 2,58	a) 0,87	a) 34,54
b) 0,7	b) 3,64	b) 0,94	b) 36,11
c) 1,75	c) 7,27	c) 3,54	c) 41,62

10. Na Figura 3, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular $[ABCDEF]$.

Sabe-se que:

- os pontos A e B têm coordenadas $(4, 2, 0)$ e $(2, 3, -3)$, respetivamente;
- o ponto C pertence ao plano mediador do segmento de reta $[AB]$;
- a reta DF é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (-7, 4, 2) + k(1, 1, -5)$, $k \in \mathbb{R}$.

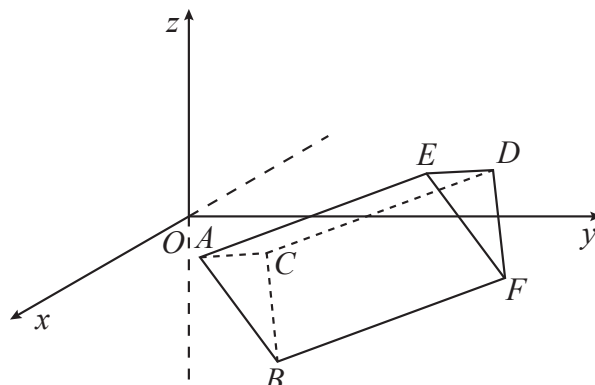


Figura 3

* 10.1. Qual das equações seguintes define uma reta perpendicular à reta DF e que passa no ponto A ?

- (A) $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + k(5, 0, -1)$, $k \in \mathbb{R}$
- (B) $(x, y, z) = (4, -3, -1) + k(0, 5, 1)$, $k \in \mathbb{R}$
- (C) $(x, y, z) = (-6, 2, -2) + k(5, 0, -1)$, $k \in \mathbb{R}$
- (D) $(x, y, z) = (4, 8, -2) + k(0, 5, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

* 10.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do ponto C .

* 11. Numa certa região, foi localizado um enxame de gafanhotos.

Admita que o número, G , em milhões, de gafanhotos do enxame, x semanas após as zero horas do dia em que este foi localizado, é dado, aproximadamente, por

$$G(x) = 0,9e^{-0,6x}(x + 0,5)^3, \text{ com } x \geq 0$$

De acordo com o modelo, existe um único instante a partir do qual, passadas quatro semanas, o número de gafanhotos ficou reduzido a metade do número de gafanhotos existentes nesse instante.

Determine, recorrendo à calculadora, quantos dias decorreram desde as zero horas do dia em que o enxame foi localizado até esse instante.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- represente, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s) que lhe permitem resolver a equação;
- apresente a(s) coordenada(s) relevante(s) desse(s) ponto(s), arredondada(s) às centésimas.

12. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = 3e^x - 2e^{-x}$$

Resolva os itens **12.1.** e **12.2.** sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos.

12.1. Considere, em referencial o.n. Oxy , a representação gráfica da função f e o trapézio $[OCAB]$, tais que:

- o ponto A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com a reta de equação $y = 5$;
- o ponto B pertence ao gráfico da função f e ao eixo Oy ;
- o ponto C pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual à abcissa do ponto A .

Determine a área do trapézio $[OCAB]$.

Apresente o resultado na forma $\ln(a)$, com $a > 0$.

12.2. Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que o gráfico da função f intersecta a reta de equação $y = 3x + 4$ em, pelo menos, um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]0, 1[$.

*** 13.** Considere uma função, f , de domínio $\mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sabe-se que:

- a função f é crescente em $] -\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$;
- a reta de equação $x = 1$ é assíntota ao gráfico da função f .

Considere as proposições seguintes.

I. A função f é contínua em $x = 1$.

II. A reta de equação $y = -x + 2$ é tangente ao gráfico da função f num ponto de abcissa diferente de 1.

Justifique que as proposições **I** e **II** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

14. Considere uma sucessão de composições geométricas, construídas a partir de um semicírculo de raio 1 .
Na Figura 4, estão representadas as três primeiras composições dessa sucessão.

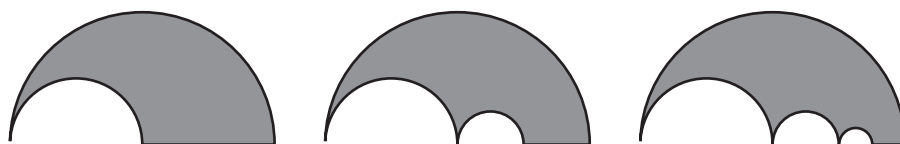


Figura 4

Tal como é ilustrado na Figura 4:

- a 1.^a composição foi obtida retirando-se ao semicírculo inicial um semicírculo nele contido, de raio $\frac{1}{2}$;
- a 2.^a composição foi obtida retirando-se à 1.^a composição um semicírculo nela contido, de raio $\frac{1}{4}$;
- a 3.^a composição foi obtida retirando-se à 2.^a composição um semicírculo nela contido, de raio $\frac{1}{8}$;
- e assim sucessivamente, retirando-se, em cada composição, um semicírculo contido na composição anterior, com metade do raio do semicírculo retirado nessa composição, de modo que o diâmetro de cada semicírculo retirado seja colinear com o diâmetro do semicírculo inicial.

Determine o perímetro da 20.^a composição geométrica desta sucessão.

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

- * 15. Sejam a , b e c números reais não nulos, e seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = ax^3 + bx + c$$

Seja r uma reta que intersecta o gráfico da função f no ponto de abcissa zero.

Mostre que, se a reta r intersectar o gráfico da função f noutros dois pontos distintos, então esses pontos têm abcissas simétricas.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.1.	2.2.	3.	5.	6.	8.	10.1.	10.2.	11.	13.	15.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	14	14	12	12	14	12	12	14	14	14	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	4.	7.		9.		12.1.		12.2.		14.		Subtotal	
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												42
TOTAL													200

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2025

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Critérios de Classificação

13 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

As respostas aos itens de seleção podem ser classificadas de forma dicotómica ou por níveis de desempenho, de acordo com os critérios específicos. No primeiro caso, a pontuação só é atribuída às respostas corretas, sendo todas as outras respostas classificadas com zero pontos. No caso da classificação por níveis de desempenho, a cada nível corresponde uma dada pontuação, de acordo com os critérios específicos.

Nas respostas aos itens de seleção, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra ou do número correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Linguagem Científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por etapas, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de classificação definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção cujos critérios se apresentam organizados por etapas.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «sem recorrer à calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. 12 pontos

(C)

2.1. 14 pontos

Reconhecer que a função g é contínua em $x = 0$ se

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0) \quad \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$$

Determinar $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \quad \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$

Reconhecer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 \sin^2 x - \sqrt{3}x + 2) \quad \dots\dots\dots 1 \text{ ponto}$

Obter $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 2 \quad \dots\dots\dots 1 \text{ ponto}$

Determinar $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \quad \dots\dots\dots 8 \text{ pontos}$

Reconhecer que $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 - \sqrt{1-x}} \quad \dots\dots\dots 1 \text{ ponto}$

Obter $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x(1 + \sqrt{1-x})}{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$

Obter $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x(1 + \sqrt{1-x})}{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x(1 + \sqrt{1-x})}{x} \quad 1 \text{ ponto}$

Reconhecer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x(1 + \sqrt{1-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + \sqrt{1-x}) \quad \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$$

Obter $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 2 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$

Referir que $g(0) = 2 \quad \dots\dots\dots 1 \text{ ponto}$

Concluir que a função g é contínua em $x = 0 \quad \dots\dots\dots 1 \text{ ponto}$

2.2. 14 pontos

- Determinar $g'(x)$ (**ver nota 1**) 2 pontos
- Escrever $g'(x) = 0$ 1 ponto
- Determinar os zeros de $g' \left(\frac{\pi}{6} \text{ e } \frac{\pi}{3} \right)$ 2 pontos
- Apresentar um quadro de sinal de g' e de monotonia de g (ou equivalente) .. 3 pontos
- Apresentar os intervalos de monotonia de g (**ver nota 2**) 3 pontos
- Apresentar os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \text{ e } \pi \right)$ 3 pontos

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.
2. Se forem apresentados os intervalos $\left] 0, \frac{\pi}{6} \right[$ e $\left] \frac{\pi}{3}, \pi \right[$, em vez de $\left] 0, \frac{\pi}{6} \right[$ e $\left] \frac{\pi}{3}, \pi \right[$, respetivamente, e o intervalo $\left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right[$, em vez de $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$, esta etapa deve ser considerada cumprida.

3. 12 pontos

(A)

4. 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

Designemos por B o acontecimento «o aluno está inscrito em *ballet* clássico» e por C o acontecimento «o aluno está inscrito em dança contemporânea».

1.º Processo

- Reconhecer que $P(B) = 0,6$ 1 ponto
- Reconhecer que $P(C \cap \overline{B}) = 0,25$ 1 ponto
- Reconhecer que $P(B|C) = 0,5$ 1 ponto
- Identificar o pedido com $P(B|\overline{C})$ 2 pontos
- Obter $P(B \cap C) = 0,5P(C)$ ou $P(B \cap C) = P(C) - 0,25$ (ou equivalente) .. 2 pontos
- Obter $P(C)$ (0,5) 2 pontos
- Obter $P(\overline{C})$ (0,5) 1 ponto
- Obter $P(B \cap C)$ (0,25) 1 ponto
- Obter $P(B \cap \overline{C})$ (0,35) 1 ponto
- Obter o valor pedido (0,7) 2 pontos

2.º Processo

Designemos por k a probabilidade de o aluno estar inscrito em dança contemporânea.

Construir uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam: B e $\bar{B}$; C e $\bar{C}$. 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(B)$ (0,6) 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(C \cap \bar{B})$ (0,25) 1 ponto

Reconhecer que $P(B|C) = 0,5$ 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(B \cap C)$ ($0,5k$ ou $k - 0,25$) 2 pontos

Determinar o valor de k (0,5) 2 pontos

Identificar o pedido com $P(B|\bar{C})$ 2 pontos

Preencher a célula da tabela relativa a $P(B \cap \bar{C})$ (0,35) 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(\bar{C})$ (0,5) 1 ponto

Obter o valor pedido (0,7) 2 pontos

5. 12 pontos

I → a) II → c) III → b) IV → a)

Este item deve ser classificado de acordo com os níveis de desempenho seguintes.

Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
3	Completa o texto com as 4 opções corretas.	12
2	Completa o texto com 3 opções corretas.	8
1	Completa o texto com 2 opções corretas.	4

6. 14 pontos

Apresentar o número de casos possíveis (${}^{10}A'_4$, ou equivalente) 4 pontos

Reconhecer que, além do zero, o código é constituído por mais um algarismo ímpar e dois algarismos pares, ou por mais três algarismos ímpares 2 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis
 $(4 \times ({}^4C_2 \times {}^3A_2 \times 5 + {}^5A_3)$ ou $({}^5C_3 + {}^4C_2 \times 5) \times 4!$)
 (ver nota 1) 6 pontos

Obter o valor pedido $\left(\frac{12}{125}\right)$ (ver nota 2) 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a $4 \times ({}^4C_2 \times {}^3A_2 \times 5 + {}^5A_3)$ ou $({}^5C_3 + {}^4C_2 \times 5) \times 4!$, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos.

2. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, ou se o valor obtido não pertencer ao intervalo $[0, 1]$, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos.

7. 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Designemos por M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

Reconhecer que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos \alpha$ 2 pontos

Reconhecer que o raio da circunferência é 2 1 ponto

Reconhecer que o triângulo $[ABC]$ é isósceles 1 ponto

Escrever $\cos \alpha = \frac{\|\vec{AM}\|}{2}$ (ou equivalente) 1 ponto

Obter $\|\vec{AM}\| = 2 \cos \alpha$ 1 ponto

Obter $\|\vec{AB}\| = 4 \cos \alpha$ 1 ponto

Obter $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 8 \cos^2 \alpha$ (ou equivalente) 2 pontos

Escrever $8 \cos^2 \alpha = 6$ (ou equivalente) 1 ponto

Obter $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 1 ponto

Obter o valor de $\alpha \left(\frac{\pi}{6} \right)$ 1 ponto

Obter a amplitude do ângulo $ACB \left(\frac{2\pi}{3} \right)$ 1 ponto

Obter o valor pedido $\left(\frac{4\pi}{3} \right)$ 1 ponto

2.º Processo

Reconhecer que o raio da circunferência é 2 1 ponto

Escrever $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (\vec{AC} + \vec{CB}) \cdot \vec{AC}$ 2 pontos

Escrever $(\vec{AC} + \vec{CB}) \cdot \vec{AC} = \vec{AC} \cdot \vec{AC} + \vec{CB} \cdot \vec{AC}$ 1 ponto

Reconhecer que $\vec{AC} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AC}\|^2$ 1 ponto

Reconhecer que $\vec{CB} \cdot \vec{AC} = -\vec{CB} \cdot \vec{CA}$ 2 pontos

Reconhecer que $\vec{CB} \cdot \vec{CA} = \|\vec{CB}\| \times \|\vec{CA}\| \times \cos(\hat{ACB})$ 2 pontos

Obter $4 - 4 \cos(\hat{ACB}) = 6$ (ou equivalente) 2 pontos

Obter $\cos(\hat{ACB}) = -\frac{1}{2}$ 1 ponto

Obter a amplitude do ângulo $ACB \left(\frac{2\pi}{3} \right)$ 1 ponto

Obter o valor pedido $\left(\frac{4\pi}{3} \right)$ 1 ponto

8. 12 pontos

(C)

9. 14 pontos

Reconhecer que $z_1 = -2i$ 1 ponto

Escrever $z_2 = \frac{(-3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$ 1 ponto

Obter $z_2 = -1 + 2i$ 2 pontos

Escrever w na forma algébrica 3 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ 2 pontos

Obter $w = k - ki$ 1 ponto

2.º Processo

Escrever $-\sqrt{2}ke^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}ke^{i\frac{7\pi}{4}}$ 1 ponto

Escrever $e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ 1 ponto

Obter $w = k - ki$ 1 ponto

Escrever $|w - z_1| = |w - z_2|$ (ou equivalente) 3 pontos

Escrever $k^2 + (2 - k)^2 = (k + 1)^2 + (-k - 2)^2$ (ou equivalente) 3 pontos

Obter o valor pedido $\left(-\frac{1}{10}\right)$ 1 ponto

10.1. 12 pontos

(B)

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Designemos por α o plano mediador do segmento de reta $[AB]$.

Reconhecer que o ponto C é o ponto de interseção da reta BC com o plano α 2 pontos

Obter uma equação do plano α 4 pontos

Obter as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ $((-2, 1, -3))$ 1 ponto

Obter as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AB]$ $\left(\left(3, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)\right)$ 1 ponto

Escrever $-2x + y - 3z + d = 0$ 1 ponto

Obter o valor de d (-1) 1 ponto

Escrever uma equação vetorial da reta BC
 $((x, y, z) = (2, 3, -3) + k(1, 1, -5), k \in \mathbb{R})$ 2 pontos

Reconhecer que as coordenadas do ponto C são da forma
 $(2 + k, 3 + k, -3 - 5k)$ 1 ponto

Escrever $-2(2 + k) + 3 + k - 3(-3 - 5k) - 1 = 0$ (ou equivalente) 2 pontos

Obter o valor de k $\left(-\frac{1}{2}\right)$ 1 ponto

Obter o pedido $\left(\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right)$ 2 pontos

2.º Processo

Reconhecer que $\overline{AC} = \overline{BC}$ 3 pontos

Escrever uma equação vetorial da reta BC
 $((x, y, z) = (2, 3, -3) + k(1, 1, -5), k \in \mathbb{R})$ 2 pontos

Reconhecer que as coordenadas do ponto C são da forma
 $(2 + k, 3 + k, -3 - 5k)$ 1 ponto

Obter $(k - 2)^2 + (k + 1)^2 + (-3 - 5k)^2 = k^2 + k^2 + (-5k)^2$
(ou equivalente) 3 pontos

Obter $28k + 14 = 0$ (ou equivalente) 2 pontos

Obter o valor de k $\left(-\frac{1}{2}\right)$ 1 ponto

Obter o pedido $\left(\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right)$ 2 pontos

11. 14 pontos

Reconhecer que o número de gafanhotos, 4 semanas após o referido instante, é dado por $G(x + 4)$ 2 pontos

Apresentar a equação

$G(x + 4) = \frac{1}{2} \times G(x)$ (ou uma equação equivalente) (**ver nota 1**) 3 pontos

Representar, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver notas 2 e 3**) 5 pontos

Assinalar o ponto relevante 2 pontos

Obter a abcissa desse ponto (4,72) 1 ponto

Apresentar o valor pedido (33 dias) 1 ponto

Notas:

1. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, desde que seja inequívoco que este corresponde à resolução de uma equação que traduz corretamente o problema.
2. Se não for apresentado um referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.
3. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

12.1. 14 pontos

Reconhecer que a área do trapézio $[OCAB]$ é dada por

$\frac{\overline{OB} + \overline{AC}}{2} \times \overline{OC}$ 2 pontos

Reconhecer que $\overline{AC} = 5$ 1 ponto

Reconhecer que $\overline{OB} = f(0)$ 1 ponto

Determinar $f(0)$ (1) 1 ponto

Reconhecer que $\overline{OC}$ é a abcissa do ponto A 1 ponto

Escrever $3e^x - 2e^{-x} = 5$ (ou equivalente) 2 pontos

Obter $3e^{2x} - 5e^x - 2 = 0$ (ou equivalente) 1 ponto

Obter $x = \ln 2$ 2 pontos

Obter o valor pedido ($\ln 8$) 3 pontos

12.2. 14 pontos

- Equacionar o problema ($f(x) = 3x + 4$, ou equivalente) 2 pontos
- Considerar a função g definida por $g(x) = f(x) - 3x - 4$ 2 pontos
- Referir que a função g é contínua em $[0, 1]$ (**ver notas 1 e 2**) 2 pontos
- Determinar $g(0)$ (-3) 2 pontos
- Determinar $g(1)$ ($3e - \frac{2}{e} - 7$) 2 pontos
- Concluir que $g(0) < 0 < g(1)$ (ou equivalente) 2 pontos
- Concluir o pretendido (**nota 3**) 2 pontos

Notas:

1. Se apenas for referido que a função g é contínua, esta etapa deve ser considerada cumprida.
2. Se for referido que a função g é contínua em $]0, 1[$, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos.
3. A atribuição de 0 pontos na terceira etapa implica a atribuição de 0 pontos a esta etapa.

13. 14 pontos

Tópicos de resposta

- Justificação da falsidade da proposição I.
Exemplo: Se a reta de equação $x = 1$ é assíntota ao gráfico da função f , pelo menos um dos limites laterais de f em $x = 1$ é $+\infty$ ou $-\infty$, sendo, por isso, diferente de $f(1)$, pelo que, f não pode ser contínua em $x = 1$.
- Justificação da falsidade da proposição II.
Exemplo: Como a função f é crescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$, a sua derivada, nos pontos em que existe, é não negativa. Assim, o declive de qualquer reta tangente ao gráfico da função f num ponto de abcissa diferente de 1, por ser igual à derivada da função na abcissa do ponto de tangência, não pode ser negativo.

Parâmetro	Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
A Conteúdos	4	Apresenta, de forma completa, as duas justificações solicitadas.	12
	3	Apresenta, de forma completa, uma das justificações solicitadas e, de forma incompleta, a outra justificação.	9
	2	Apresenta, de forma completa, apenas uma das justificações solicitadas. OU Apresenta, de forma incompleta, as duas justificações solicitadas.	6
	1	Apresenta, de forma incompleta, apenas uma das justificações solicitadas.	3
B Linguagem Científica	2	Utiliza adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	2
	1	Utiliza, embora com uma ou mais falhas, o vocabulário específico da Matemática.	1

14. 14 pontos

Obter o comprimento da semicircunferência de raio 1 (π) 1 ponto

Obter o comprimento da semicircunferência de raio $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)$ 1 ponto

Reconhecer que os comprimentos das semicircunferências dos semicírculos retirados até à 20.^a composição são termos consecutivos de uma progressão geométrica de primeiro termo $\frac{\pi}{2}$ e razão $\frac{1}{2}$ 2 pontos

Escrever uma expressão para a soma dos comprimentos das semicircunferências dos semicírculos retirados até à 20.^a composição

$\left(S_{20} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{20}}{1 - \frac{1}{2}}, \text{ ou equivalente} \right)$ 3 pontos

Reconhecer que o comprimento do segmento de reta na composição de ordem n é $\left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ (ou equivalente) 2 pontos

Escrever uma expressão para o comprimento do segmento de reta da 20.^a composição $\left(\left(\frac{1}{2} \right)^{19} \right)$ 2 pontos

Reconhecer que o valor pedido é dado por $\pi + S_{20} + \left(\frac{1}{2} \right)^{19}$ 2 pontos

Obter o pedido (6,28) 1 ponto

15. 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Designemos por A o ponto do gráfico de f de abcissa nula e por B e C os pontos do gráfico de f de abcissas x_B e x_C , não nulas.

Reconhecer que, se B e C também pertencerem à reta r , então as retas AB e AC têm o mesmo declive..... 3 pontos

Escrever $\frac{f(x_B) - f(0)}{x_B - 0} = \frac{f(x_C) - f(0)}{x_C - 0}$ 2 pontos

Reconhecer que $f(0) = c$ 1 ponto

Escrever $\frac{ax_B^3 + bx_B + c - c}{x_B} = \frac{ax_C^3 + bx_C + c - c}{x_C}$ 2 pontos

Obter $\frac{x_B(ax_B^2 + b)}{x_B} = \frac{x_C(ax_C^2 + b)}{x_C}$ 1 ponto

Obter $a(x_B^2 - x_C^2) = 0$ 2 pontos

Obter $x_B = x_C \vee x_B = -x_C$ 2 pontos

Concluir o pretendido 1 ponto

2.º Processo

Designemos por m o declive da reta r .

Reconhecer que uma equação da reta r é da forma $y = mx + c$ 2 pontos

Reconhecer que as abcissas dos pontos de intersecção da reta r com o gráfico da função f são as soluções da equação $f(x) = mx + c$ 3 pontos

Escrever $ax^3 + bx + c = mx + c$ 1 ponto

Obter $x = 0 \vee x^2 = \frac{m-b}{a}$ 3 pontos

Reconhecer que, se a reta r intersectar o gráfico da função f noutros dois pontos, a equação $x^2 = \frac{m-b}{a}$ tem duas soluções 2 pontos

Obter $x = -\sqrt{\frac{m-b}{a}} \vee x = \sqrt{\frac{m-b}{a}}$ 2 pontos

Concluir o pretendido 1 ponto

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.1.	2.2.	3.	5.	6.	8.	10.1.	10.2.	11.	13.	15.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	14	14	12	12	14	12	12	14	14	14	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	4.		7.		9.		12.1.		12.2.		14.		Subtotal
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												42
TOTAL													200