

Exame Final Nacional de Matemática A
Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2025
12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As citações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

* 1. Qual é o limite da sucessão de termo geral $u_n = \frac{2n+4}{3n+5}$?

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$

* 2. Na tabela seguinte, apresentam-se os dados referentes à produção de pera e de maçã, em quilogramas por hectare (kg/ha), em cada ano, de 2019 a 2023, em Portugal continental.

Ano	2019	2020	2021	2022	2023
Pera (kg/ha)	17 530	11 565	20 208	12 197	10 929
Maçã (kg/ha)	26 067	20 087	26 644	21 330	21 072

Fonte: Instituto Nacional de Estatística (consultado em setembro de 2024).

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A mediana dos valores da produção de maçã excede a mediana dos valores da produção de pera em **I** kg/ha.

De 2020 para 2021, a produção de maçã teve um aumento de, aproximadamente, **II** .

No que respeita à distribuição da produção de pera, houve **III** anos em que a produção foi inferior à soma da média com o desvio padrão.

De acordo com previsões do INE, a produção acumulada de maçã, de 2019 a 2024, seria 136 270 kg/ha, enquanto a produção acumulada de pera, no mesmo período, corresponderia a 60% da produção acumulada de maçã. De acordo com os dados da tabela e com esta previsão do INE, obtém-se para o valor da produção de pera em 2024, aproximadamente, **IV** kg/ha.

I	II	III	IV
a) 6436	a) 25%	a) dois	a) 6557
b) 8554	b) 33%	b) três	b) 9333
c) 9133	c) 75%	c) quatro	c) 12 643

3. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-x}}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x^2 + \ln(ex + e)}{x + 1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens 3.1. e 3.2. sem recorrer à calculadora.

* 3.1. Averigue se a função f é contínua em $x = 0$.

* 3.2. Mostre que a reta de equação $y = x - 1$ é assíntota ao gráfico da função f quando $x \rightarrow +\infty$.

4. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine os números reais que são solução da equação

$$\frac{1}{2}e^x \ln(4 - x)^2 - 5 \ln(4 - x) = (5 - e^x) \ln(7 - 2x)$$

* 5. Seja E , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Sabe-se que:

- $P(A \cap \overline{B}) = 0,5$;
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,3$.

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) 0,2

(B) 0,3

(C) 0,7

(D) 0,8

6. Uma turma do 12.º ano é constituída por 25 alunos com 17 ou 18 anos de idade.

A Isabel e o José são alunos da turma e têm 17 anos.

Sabe-se que:

- 64% dos alunos são rapazes;
- $\frac{3}{4}$ dos rapazes têm 17 anos;
- $\frac{1}{3}$ das raparigas têm 18 anos.

Pretende-se constituir um grupo de seis alunos selecionados, ao acaso, de entre todos os alunos da turma.

Determine a probabilidade de o grupo ser constituído pela Isabel, pelo José, por outro aluno (rapaz ou rapariga) com 17 anos e por três alunos (rapazes ou raparigas) com 18 anos.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas.

- * 7. Na Figura 1, estão representados, no plano complexo, o triângulo $[OZW]$ e o ponto M .

Sabe-se que:

- $\overline{OZ} = \overline{OW}$;
- os pontos Z e W são os afijos dos números complexos z e w , respetivamente;
- um argumento de z , em radianos, é $\frac{2\pi}{15}$;
- o ponto M pertence à bissetriz do primeiro quadrante e é o ponto médio do segmento de reta $[WZ]$.

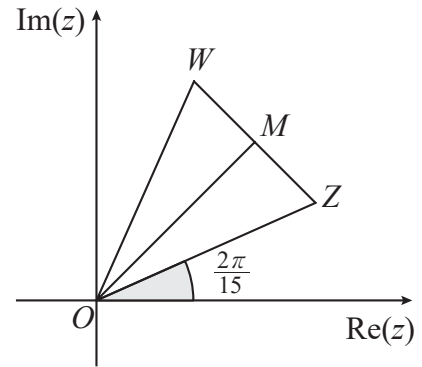


Figura 1

Qual dos seguintes valores é um argumento, em radianos, do número complexo w ?

- (A) $\frac{7\pi}{60}$ (B) $\frac{11\pi}{60}$ (C) $\frac{7\pi}{30}$ (D) $\frac{11\pi}{30}$

8. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número

$$z = \frac{5ai^{15}}{1-2i} + \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}, \text{ com } a \in \mathbb{R}$$

Sabe-se que $\text{Im}(z) - \text{Re}(z) = 1$.

Determine z na forma trigonométrica.

9. Na Figura 2, estão representados, em referencial o.n. Oxy , a circunferência centrada na origem e de raio 1, o triângulo $[ABC]$ e a reta de equação $x = 1$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência;
- o ponto B pertence à reta de equação $x = 1$;
- o ponto O pertence à reta AB ;
- α é a inclinação, em radianos, da reta AB ($\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$);
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Oy ;
- a reta AC é paralela ao eixo Ox .

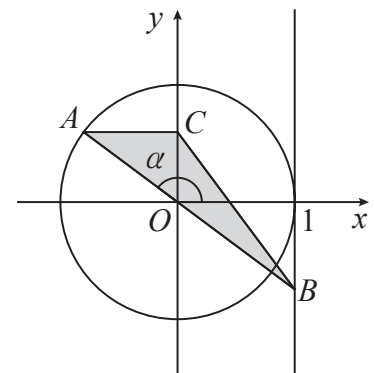


Figura 2

Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de α , por

$$\frac{2 \sin \alpha - \sin(2\alpha)}{4}$$

10. Na Figura 3, está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide regular de base quadrada $[ABCD]$ e vértice V .

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \sqrt{6}$;
- o centro da base da pirâmide, M , tem coordenadas $(2, -1, 3)$;
- o ponto V tem abcissa positiva;
- o plano ABC é definido pela equação $2x - y + z - 8 = 0$;
- o volume da pirâmide é $4\sqrt{6}$.

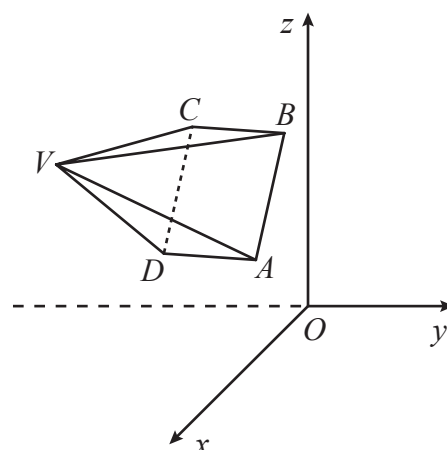


Figura 3

- * 10.1. Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$?

- (A) -6 (B) 0
(C) $2\sqrt{6}$ (D) 6

- * 10.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do ponto V .

- * 10.3. Pretende-se pintar as cinco faces da pirâmide $[ABCDV]$, dispondo-se, para o efeito, de seis cores distintas.

Todas as condições seguintes deverão ser respeitadas:

- cada face é pintada com uma só cor;
- são utilizadas, no mínimo, quatro das seis cores disponíveis;
- duas faces que tenham uma aresta em comum são pintadas com cores diferentes.

A expressão seguinte representa o número total de formas possíveis de pintar as cinco faces da pirâmide respeitando as condições enunciadas.

$${}^6C_4 \times 2 \times 4! + {}^6A_5$$

Explique, no contexto descrito, cada parcela desta expressão.

11. Seja g uma função diferenciável, de domínio $\mathbb{R}$, cuja derivada, g' , é definida por

$$g'(x) = \cos(3x) + \frac{3}{2}x + 1$$

Resolva os itens 11.1. e 11.2. sem recorrer à calculadora.

* 11.1. Estude a função g , no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função g tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função g tem concavidade voltada para cima;
- as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico da função g .

11.2. Seja r a reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa 0, e seja s uma reta perpendicular à reta r .

Sabe-se que:

- a reta s intersecta os eixos Ox e Oy nos pontos A e B , respetivamente;
- o ponto A tem abscissa positiva;
- o triângulo $[OAB]$ tem área igual a 12.

Determine a abscissa do ponto A .

* 12. Admita que, de acordo com um estudo de mercado realizado pela Biclatour, empresa de fabrico de bicicletas, o número de unidades das bicicletas Ciclatour que se prevê vender, em função do preço, p , em centenas de euros, de cada unidade, é dado, aproximadamente, por

$$N(p) = 4000 \times e^{-0,34p} - 1,12p + 50, \text{ com } 2 \leq p \leq 10$$

De acordo com este modelo, sabe-se que existe um único preço para o qual o valor total que se prevê obter com a venda das bicicletas Ciclatour é igual a 4000 centenas de euros.

Determine esse preço, recorrendo à calculadora.

Apresente o resultado em euros, arredondado às unidades.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- represente, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s) que lhe permitem resolver a equação;
- apresente a(s) coordenada(s) relevante(s) desse(s) ponto(s), arredondada(s) às centésimas.

13. Na Figura 4, apresentam-se as quatro primeiras composições geométricas da construção do Tapete de Sierpiński.

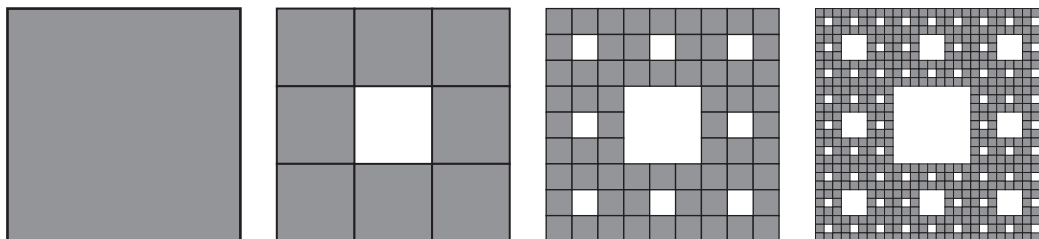


Figura 4

Tal como a figura sugere, nesta construção:

- a 1.^a composição é um quadrado;
- a 2.^a composição, com 8 quadrados, obtém-se decompondo a 1.^a em 9 quadrados iguais e removendo o quadrado central;
- cada uma das composições seguintes obtém-se decompondo cada um dos quadrados obtidos na composição anterior em 9 quadrados iguais e removendo os quadrados centrais.

Admita que, fixada uma unidade de medida, o quadrado inicial tem área igual a 9 e que se continuava a construção, de acordo com o procedimento descrito, até se obter a 50.^a composição.

Determine a área da 50.^a composição, ou seja, a área total dos quadrados que formam essa composição.

Apresente o valor pedido arredondado às milésimas.

- * 14. Seja a um número real positivo, e seja h uma função contínua de domínio $[0, a]$ e contradomínio $[0, a]$.

Prove que existe, pelo menos, um ponto do gráfico da função h que pertence à bissetriz do primeiro quadrante.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.	3.1.	3.2.	5.	7.	10.1.	10.2.	10.3.	11.1.	12.	14.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	12	14	14	12	12	12	14	14	14	14	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	4.		6.		8.		9.		11.2.		13.		Subtotal
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												42
TOTAL													200

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2025

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Critérios de Classificação

14 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

As respostas aos itens de seleção podem ser classificadas de forma dicotómica ou por níveis de desempenho, de acordo com os critérios específicos. No primeiro caso, a pontuação só é atribuída às respostas corretas, sendo todas as outras respostas classificadas com zero pontos. No caso da classificação por níveis de desempenho, a cada nível corresponde uma dada pontuação, de acordo com os critérios específicos.

Nas respostas aos itens de seleção, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra ou do número correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Linguagem Científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por etapas, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de classificação definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção cujos critérios se apresentam organizados por etapas.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «sem recorrer à calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. 12 pontos

(A)

2. 12 pontos

I → c) II → b) III → c) IV → b)

Este item deve ser classificado de acordo com os níveis de desempenho seguintes.

Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
3	Completa o texto com as 4 opções corretas.	12
2	Completa o texto com 3 opções corretas.	8
1	Completa o texto com 2 opções corretas.	4

3.1. 14 pontos

Reconhecer que a função f é contínua em $x = 0$ se

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ 2 pontos

Determinar $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 2 pontos

Reconhecer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \ln(ex + e)}{x + 1}$ 1 ponto

Obter $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ 1 ponto

Determinar $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 8 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{-x}}{x}$ 1 ponto

Escrever $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{-x}}{x} = \lim_{y = -x, y \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^y}{-y}$ 4 pontos

Obter $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^y}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y}$ 2 pontos

Obter $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ 1 ponto

2.º Processo

Reconhecer que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{-x}}{x}$ 1 ponto

Obter $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{x}$ 2 pontos

Obter $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{xe^x}$ 1 ponto

Reconhecer que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x}$ 2 pontos

Obter $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ 2 pontos

Referir que $f(0) = 1$ 1 ponto

Concluir que a função f é contínua em $x = 0$ 1 ponto

3.2. 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que a reta de equação $y = x - 1$ é assintota ao gráfico da função f , quando $x \rightarrow +\infty$, se $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$ 5 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + \ln(ex + e)}{x + 1} - x + 1 \right)$ 1 ponto

Obter $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + \ln(ex + e)}{x + 1} - x + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(ex + e) + 1}{x + 1}$ 1 ponto

Reconhecer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(ex + e) + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(ex + e)}{x + 1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 1}$ 2 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(ex + e)}{x + 1} = e \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}$ 3 pontos

Obter $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$ 2 pontos

2.º Processo

Determinar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 8 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln(ex + e)}{x(x + 1)}$ 1 ponto

Escrever

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln(ex + e)}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(ex + e)}{x^2 + x}$ 1 ponto

Reconhecer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x} = 1$ 1 ponto

Obter $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(ex + e)}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(ex + e)}{x + 1}$ 1 ponto

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(ex + e)}{x + 1} = e \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}$ 2 pontos

Obter $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ 2 pontos

Determinar $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ 5 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + \ln(ex + e)}{x + 1} - x \right)$ 1 ponto

Obter $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + \ln(ex + e)}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(ex + e) - x}{x + 1}$ 1 ponto

Escrever

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(ex + e) - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(ex + e)}{x + 1} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + 1}$ 1 ponto

Reconhecer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + 1} = 1$ 1 ponto

Obter $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -1$ 1 ponto

Concluir o pretendido 1 ponto

4. 14 pontos

Determinar o domínio da condição $\left(]-\infty, \frac{7}{2}[\right)$ 2 pontos

Obter $e^x \ln(4 - x) - 5 \ln(4 - x) = (5 - e^x) \ln(7 - 2x)$ 1 ponto

Obter $(e^x - 5) \ln(4 - x) + (e^x - 5) \ln(7 - 2x) = 0$ 2 pontos

Obter $(e^x - 5)(\ln(4 - x) + \ln(7 - 2x)) = 0$ 1 ponto

Obter $(e^x - 5) \ln((4 - x)(7 - 2x)) = 0$ 1 ponto

Obter $e^x - 5 = 0 \vee \ln((4 - x)(7 - 2x)) = 0$ 1 ponto

Reconhecer que $(4 - x)(7 - 2x) = 1$ 1 ponto

Resolver a condição $e^x - 5 = 0 \vee (4 - x)(7 - 2x) = 1$ 2 pontos

Apresentar os valores pedidos $(\ln 5 \text{ e } 3)$ (**ver nota**) 3 pontos

Nota – Se forem apresentados valores que não pertencem ao domínio da condição, a pontuação máxima a atribuir a esta etapa é 2 pontos.

5. 12 pontos

(A)

6. 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar o número de alunos com 17 anos e o número de alunos com 18 anos 4 pontos

Apresentar o número de casos possíveis (${}^{25}C_6$) 4 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis (${}^7C_3 \times 16$) (**ver nota 1**) 4 pontos

Obter o valor pedido (0,003) (**ver nota 2**) 2 pontos

2.º Processo

Determinar o número de alunos com 17 anos e o número de alunos com 18 anos 4 pontos

Apresentar o número de casos possíveis (${}^{25}A_6$) 4 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis (${}^7C_3 \times 16 \times 6!$) (**ver nota 1**) 4 pontos

Obter o valor pedido (0,003) (**ver nota 2**) 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^7C_3 \times 16$ (1.º processo), ou a ${}^7C_3 \times 16 \times 6!$ (2.º processo), a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos.

2. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, ou se o valor obtido não pertencer ao intervalo $[0, 1]$, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos.

7. 12 pontos

(D)

8. 14 pontos
- Identificar i^{15} com $-i$ 1 ponto
- Obter $\frac{5ai^{15}}{1-2i} = 2a - ai$ 3 pontos
- Escrever $\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}$ na forma algébrica $(1 - i)$ 2 pontos
- Obter $z = 2a + 1 + (-a - 1)i$ (ou equivalente) 2 pontos
- Reconhecer que $-a - 1 - 2a - 1 = 1$ 2 pontos
- Obter o valor de a (-1) 1 ponto
- Obter $z = -1$ 1 ponto
- Escrever z na forma trigonométrica $(e^{i\pi})$, ou equivalente) 2 pontos
9. 14 pontos
- Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.
- 1.º Processo**
- Designemos por D o ponto de intersecção da reta AC com a reta de equação $x = 1$ e por E o ponto de coordenadas $(1, 0)$.
- Reconhecer que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por $\frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2}$ 2 pontos
- Reconhecer que $\overline{AC} = -\cos \alpha$ 3 pontos
- Reconhecer que $\overline{DE} = \sin \alpha$ 2 pontos
- Reconhecer que $\overline{BE} = -\operatorname{tg} \alpha$ 3 pontos
- Obter $\frac{-\cos \alpha (\sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha)}{2}$ (ou equivalente) 1 ponto
- Substituir $\operatorname{tg} \alpha$ por $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ 1 ponto
- Reconhecer que $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin (2\alpha)}{2}$ 1 ponto
- Concluir o pretendido 1 ponto

2.º Processo

Reconhecer que a área do triângulo $[ABC]$ é a soma das áreas dos triângulos $[AOC]$ e $[OBC]$	2 pontos
Reconhecer que a área do triângulo $[AOC]$ é dada por $\frac{\overline{AC} \times \overline{OC}}{2}$	1 ponto
Reconhecer que a área do triângulo $[OBC]$ é dada por $\frac{\overline{OC} \times 1}{2}$	2 pontos
Reconhecer que $\overline{AC} = -\cos \alpha$	3 pontos
Reconhecer que $\overline{OC} = \sin \alpha$	2 pontos
Obter $\frac{\sin \alpha}{2} - \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{2}$ (ou equivalente)	2 pontos
Reconhecer que $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin(2\alpha)}{2}$	1 ponto
Concluir o pretendido	1 ponto

10.1. 12 pontos
(D)

10.2. 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Obter a altura da pirâmide $(2\sqrt{6})$	1 ponto
Reconhecer que $\ \overrightarrow{MV}\ = 2\sqrt{6}$	1 ponto
Reconhecer que o vetor de coordenadas $(2, -1, 1)$ é um vetor diretor da reta MV	2 pontos
Escrever uma equação vetorial da reta MV $((x, y, z) = (2, -1, 3) + k(2, -1, 1), k \in \mathbb{R})$	2 pontos
Reconhecer que as coordenadas do ponto V são da forma $(2 + 2k, -1 - k, 3 + k)$	2 pontos
Obter $\ \overrightarrow{MV}\ = \sqrt{(2k)^2 + (-k)^2 + k^2}$ (ou equivalente)	2 pontos
Obter $6k^2 = 24$ (ou equivalente)	1 ponto
Obter os valores de k $(-2$ e $2)$	1 ponto
Obter o pedido $((6, -3, 5))$	2 pontos

2.º Processo

Obter a altura da pirâmide $(2\sqrt{6})$	1 ponto
Reconhecer que $\ \overrightarrow{MV}\ = 2\sqrt{6}$	1 ponto
Reconhecer que $V = M + \overrightarrow{MV}$	1 ponto
Reconhecer que o vetor de coordenadas $(2, -1, 1)$ e o vetor $\overrightarrow{MV}$ são colineares	1 ponto
Reconhecer que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{MV}$ são da forma $(2k, -k, k)$...	2 pontos
Obter $\ \overrightarrow{MV}\ = \sqrt{(2k)^2 + (-k)^2 + k^2}$ (ou equivalente)	2 pontos
Obter $6k^2 = 24$ (ou equivalente)	1 ponto
Obter os valores de k $(-2$ e $2)$	1 ponto
Obter as coordenadas do vetor $\overrightarrow{MV}$ $((4, -2, 2))$	2 pontos
Obter o pedido $((6, -3, 5))$	2 pontos

10.3. 14 pontos

Tópicos de resposta

- Explicação da parcela ${}^6C_4 \times 2 \times 4!$.
Exemplo: Existem 6C_4 maneiras de escolher quatro das seis cores disponíveis para pintar as faces da pirâmide com quatro cores; para cada uma dessas maneiras, existem duas maneiras de escolher as duas faces opostas que têm de ser pintadas com a mesma cor e, para cada uma destas escolhas, existem $4!$ maneiras de pintar as faces da pirâmide usando as quatro cores escolhidas.
- Explicação da parcela 6A_5 .
Exemplo: Existem 6A_5 maneiras de pintar as faces da pirâmide com cinco das seis cores disponíveis, permutando as cores pelas faces.

Parâmetro	Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
A Conteúdos	4	Apresenta, de forma completa, as duas explicações solicitadas.	12
	3	Apresenta, de forma completa, uma das explicações solicitadas e, de forma incompleta, a outra explicação.	9
	2	Apresenta, de forma completa, apenas uma das explicações solicitadas. OU Apresenta, de forma incompleta, as duas explicações solicitadas.	6
	1	Apresenta, de forma incompleta, apenas uma das explicações solicitadas.	3
B Linguagem Científica	2	Utiliza adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	2
	1	Utiliza, embora com uma ou mais falhas, o vocabulário específico da Matemática.	1

11.1. 14 pontos

- Determinar $g''(x)$ (ver nota 1) 2 pontos
- Escrever $g''(x) = 0$ 1 ponto
- Determinar os zeros de g'' $\left(\frac{\pi}{18} \text{ e } \frac{5\pi}{18}\right)$ 3 pontos
- Apresentar um quadro de sinal de g'' e de sentido das concavidades do gráfico de g (ou equivalente) 3 pontos
- Apresentar os intervalos em que a concavidade do gráfico de g é voltada para cima e o intervalo em que a concavidade do gráfico de g é voltada para baixo (ver nota 2) 3 pontos
- Apresentar as abscissas dos pontos de inflexão $\left(\frac{\pi}{18} \text{ e } \frac{5\pi}{18}\right)$ 2 pontos

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função g' , a pontuação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.
2. Se forem apresentados os intervalos $\left]0, \frac{\pi}{18}\right[$ e $\left]\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{2}\right[$, em vez de $\left]0, \frac{\pi}{18}\right[$ e $\left]\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{2}\right[$, respetivamente, e o intervalo $\left]\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}\right[$, em vez de $\left[\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}\right]$, esta etapa deve ser considerada cumprida.

11.2. 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

Designemos por x_A a abscissa do ponto A e por y_B a ordenada do ponto B .

1.º Processo

- Reconhecer que a área do triângulo é dada por $\frac{x_A \times |y_B|}{2}$ 1 ponto
- Reconhecer que o declive da reta r é $g'(0)$ 2 pontos
- Obter $g'(0)$ (2) 1 ponto
- Reconhecer que o declive da reta s é $-\frac{1}{g'(0)}$ 1 ponto
- Obter o declive da reta s $\left(-\frac{1}{2}\right)$ 1 ponto
- Reconhecer que o declive da reta s é $-\frac{y_B}{x_A}$ 2 pontos
- Obter $y_B = \frac{x_A}{2}$ (ou equivalente) 1 ponto
- Reconhecer que $y_B > 0$ 1 ponto
- Escrever $\frac{x_A \times \frac{x_A}{2}}{2} = 12$ (ou equivalente) 1 ponto
- Resolver a equação $\frac{x_A \times \frac{x_A}{2}}{2} = 12$ 2 pontos
- Obter o pedido $(4\sqrt{3}, \text{ ou equivalente})$ 1 ponto

2.º Processo

Reconhecer que a área do triângulo é dada por $\frac{x_A \times y_B }{2}$	1 ponto
Reconhecer que o declive da reta r é $g'(0)$	2 pontos
Obter $g'(0)$ (2)	1 ponto
Reconhecer que o declive da reta s é $-\frac{1}{g'(0)}$	1 ponto
Obter o declive da reta s $\left(-\frac{1}{2}\right)$	1 ponto
Escrever $y = -\frac{1}{2}x + y_B$ (ou equivalente)	1 ponto
Reconhecer que $0 = -\frac{1}{2}x_A + y_B$	1 ponto
Obter $y_B = \frac{x_A}{2}$ (ou equivalente)	1 ponto
Reconhecer que $y_B > 0$	1 ponto
Escrever $\frac{x_A \times \frac{x_A}{2}}{2} = 12$ (ou equivalente)	1 ponto
Resolver a equação $\frac{x_A \times \frac{x_A}{2}}{2} = 12$	2 pontos
Obter o pedido ($4\sqrt{3}$, ou equivalente)	1 ponto

3.º Processo

Reconhecer que $\frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = 12$	1 ponto
Obter $\overline{OB} = \frac{24}{\overline{OA}}$ (ou equivalente)	1 ponto
Reconhecer que o declive da reta r é $g'(0)$	2 pontos
Obter $g'(0)$ (2)	1 ponto
Reconhecer que o declive da reta s é $-\frac{1}{g'(0)}$	1 ponto
Obter o declive da reta s $\left(-\frac{1}{2}\right)$	1 ponto
Reconhecer que a ordenada na origem da reta s é positiva	1 ponto
Obter uma equação da reta s em função de $\overline{OA}$ $\left(y = -\frac{1}{2}x + \frac{24}{\overline{OA}}\right)$	2 pontos
Resolver a equação $0 = -\frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{24}{\overline{OA}}$	3 pontos
Obter o pedido ($4\sqrt{3}$, ou equivalente)	1 ponto

12. 14 pontos

Reconhecer que o valor total que se prevê obter com a venda das bicicletas, é dado por $p \times N(p)$ 4 pontos

Apresentar a equação $p \times N(p) = 4000$ (ou uma equação equivalente) (ver nota 1) 3 pontos

Representar, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (ver notas 2 e 3) 4 pontos

Assinalar o ponto relevante para a resolução do problema 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto (4,73) 1 ponto

Apresentar o valor pedido (473 euros) 1 ponto

Notas:

1. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, desde que seja inequívoco que este corresponde à resolução de uma equação que traduz corretamente o problema.
2. Se não for apresentado um referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.
3. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

13. 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que as áreas dos quadrados obtidos em cada composição são termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $\frac{8}{9}$ 6 pontos

Escrever uma expressão para a área da 50.^a composição $\left(9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{49}\right)$, ou equivalente) 6 pontos

Obter o valor pedido (0,028) 2 pontos

2.º Processo

Seja (a_n) a sucessão das áreas das composições geométricas da construção.

Reconhecer que a sucessão do número de quadrados retirados em cada composição, a partir da segunda (inclusive), é uma progressão geométrica de razão 8 3 pontos

Reconhecer que a sucessão das áreas de cada quadrado retirado em cada composição, a partir da segunda (inclusive), é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{9}$ 3 pontos

Reconhecer que a sucessão das áreas dos quadrados retirados na composição de ordem n é a soma dos $n - 1$ primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{8}{9}$ e primeiro termo igual a 1 4 pontos

Escrever $a_{50} = 9 - \left(1 \times \frac{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{49}}{1 - \frac{8}{9}} \right)$ 2 pontos

Obter o valor pedido (0,028) 2 pontos

14. 14 pontos

Equacionar o problema $(h(x) = x)$, ou equivalente) 2 pontos

Considerar a função f definida por $f(x) = h(x) - x$ 2 pontos

Referir que f é contínua em $[0, a]$ (ver nota) 2 pontos

Justificar que $f(0) \geq 0$ 2 pontos

Justificar que $f(a) \leq 0$ 2 pontos

Referir que, se $f(0) = 0$ ou se $f(a) = 0$, a intersecção existe no ponto de coordenadas $(0, 0)$ ou no ponto de coordenadas (a, a) , respetivamente . 2 pontos

Referir que, se $f(a) < 0$ e $f(0) > 0$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir o pretendido 2 pontos

Nota – Se apenas for referido que a função f é contínua, esta etapa deve ser considerada cumprida.

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.	3.1.	3.2.	5.	7.	10.1.	10.2.	10.3.	11.1.	12.	14.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	12	14	14	12	12	12	14	14	14	14	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	4.		6.		8.		9.		11.2.		13.		Subtotal
Cotação (em pontos)	3 x 14 pontos												42
TOTAL													200