

Exame Final Nacional de Matemática A
Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2026
12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

13 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado (*), cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

As respostas aos itens da prova são registadas no caderno de respostas.

A prova inclui um formulário.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Assinale, na folha de respostas, a opção selecionada.

Nas respostas aos itens de construção, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

*** 1.** Para certos números reais a e b ($a > 1$ e $b > 0$), tem-se $\log_a(b^2) = 16$.

Qual é o valor de $\log_a\left(\frac{a}{b}\right)$?

(A) -7

(B) -3

(C) 5

(D) 9

2. Seja f uma função real, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, f' , de domínio $\mathbb{R}^+$, é definida por

$$f'(x) = \frac{1 + 2 \ln x}{x}$$

Resolva os itens **2.1.** e **2.2.** sem recorrer à calculadora.

*** 2.1.** Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abscissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico da função f , caso este(s) exista(m).

2.2. Considere, em referencial o.n. Oxy , as retas r e s .

Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto A , de coordenadas $(e, 2)$;
- a reta s é perpendicular à reta r e intersecta o eixo Ox no ponto de abscissa -3 ;
- a reta s intersecta o eixo Oy no ponto B .

Determine a área do triângulo $[AOB]$.

3.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O item **3.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.

O item **3.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.

Responda apenas a um dos itens.

*** 3.(AE2018)**

Seja E , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$), tais que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,4$.

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

- (A) 0,4
- (B) 0,6
- (C) 0,8
- (D) 1

*** 3.(AE2023)**

Admita que o preço de uma refeição, numa cantina, pode ser modelado por uma variável aleatória com distribuição normal, de valor médio 7 euros.

A probabilidade de, nessa cantina, se pagar por uma refeição mais do que 9 euros é igual a 12%.

A Carla almoçou nessa cantina.

Qual é a probabilidade de a Carla ter pagado, pela refeição, um valor entre 7 e 9 euros?

- (A) 24%
- (B) 38%
- (C) 44%
- (D) 68%

*** 4.** O Instituto Nacional de Estatística (INE) realiza, de forma periódica, o Inquérito às Despesas das Famílias, o qual permite analisar o modo como os agregados familiares portugueses distribuem as suas despesas.

Na tabela seguinte, apresentam-se as percentagens da despesa anual média associadas à habitação e à alimentação, em relação à despesa total anual média por agregado familiar, em seis anos do período entre 1989 e 2023.

Ano	Despesa anual média em habitação (%) (x)	Despesa anual média em alimentação (%) (y)
1989/1990	12,4	29,5
1994/1995	20,6	21,0
2005/2006	26,6	15,5
2010/2011	29,2	13,3
2015/2016	31,9	14,3
2022/2023	39,0	12,9

Fonte: www.ine.pt (consultado em setembro de 2025).

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela.

Assinale, na folha de respostas, para cada letra, o número da opção selecionada.

O desvio padrão das percentagens da despesa anual média associada à habitação é **(a)** ao desvio padrão das percentagens da despesa anual média associada à alimentação.

De acordo com dados do INE, em 2022/2023, a despesa anual média associada à alimentação foi 3121 euros. Considerando os dados da tabela, em 2022/2023, a despesa anual média associada à habitação, arredondada às unidades, foi **(b)** euros.

O coeficiente de correlação linear entre as variáveis x e y , apresentadas na tabela, arredondado às centésimas, é **(c)**.

Em 2000, a despesa anual média associada à habitação foi 19,8% da despesa total anual média. Admitindo a validade do modelo de regressão linear de y em função de x , e com base nas estimativas dos parâmetros, arredondadas às milésimas, estima-se que a percentagem da despesa anual média associada à alimentação, em relação à despesa total anual média, em 2000, foi, aproximadamente, **(d)** (valor arredondado às décimas).

(a)	(b)	(c)	(d)
(1) inferior	(1) 1217	(1) -0,93	(1) 20,2%
(2) igual	(2) 4338	(2) -0,88	(2) 22,2%
(3) superior	(3) 9436	(3) 0,86	(3) 35,0%

5. Considere todos os números naturais com cinco algarismos diferentes.

Determine quantos destes números são múltiplos de 5 e maiores do que 50 000 .

* 6. Numa caixa, estão vários cartões. Cada cartão está numerado com um número inteiro positivo.

Relativamente aos números inscritos nesses cartões, sabe-se que:

- 62,5% são múltiplos de três;
- um terço dos que não são múltiplos de três são pares.

Selecionou-se, ao acaso, um cartão dessa caixa.

Determine a probabilidade de esse cartão estar numerado com um múltiplo de três ou com um número ímpar.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

7.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 7.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.

O **item 7.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.

Responda apenas a um dos itens.

* 7.(AE2018)

Considere a sucessão (u_n) definida por

$$u_n = \frac{3n+5}{n+2}$$

Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

* 7.(AE2023)

Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 e^x - \frac{1}{2}$.

A função f é contínua e tem exatamente um zero no intervalo $] -2, 0[$.

Determine, pelo método de Newton-Raphson, a aproximação desse zero obtida na primeira iteração, partindo do valor inicial $x_0 = -1$.

Apresente o resultado arredondado às milésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, quatro casas decimais.

8. Na Figura 1, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$.

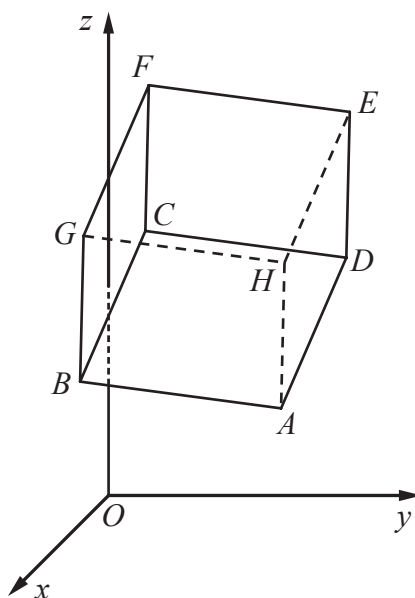


Figura 1

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(-3, 5, 2)$;
- o plano BCF é definido pela equação $-3x + 6y - 2z + 14 = 0$.

*** 8.1.** Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH} < 0$
- (B) $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$
- (C) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$
- (D) $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{AD} > 0$

*** 8.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine o volume do cubo $[ABCDEFGH]$.

9. Na Figura 2, está representado, em referencial o.n. Oxy , o retângulo $[ABCD]$.

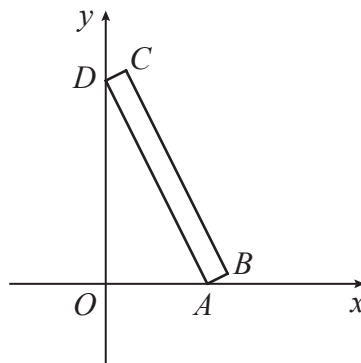


Figura 2

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(2, 0)$;
- o ponto D pertence ao eixo Oy ;
- a reta BC é definida pela equação reduzida $y = -2x + 5$.

Determine as coordenadas do ponto C .

* 10. Considere uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, contínua e diferenciável.

Sabe-se que:

- $f(0) = 2$;
- $f(1) \times f(2) < 0$;
- $f'(x) < 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Considere as proposições seguintes.

I. $f(1) > 2$.

II. O domínio da função $\frac{1}{f}$ é $\mathbb{R}$.

Justifique que as proposições I e II são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

- * 11. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $z = e^{i\theta}$, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Na Figura 3, estão representados, no plano complexo, o ponto P , afixo de z , e outros quatro pontos, A , B , C e D .

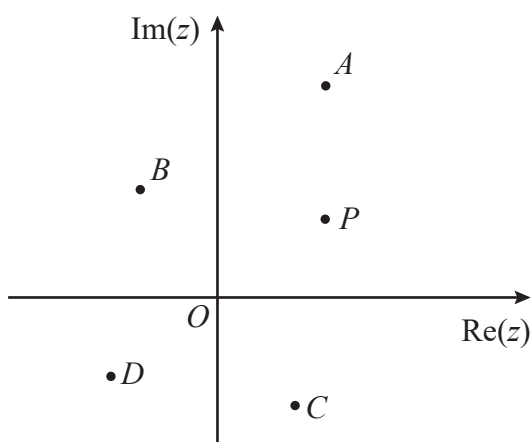


Figura 3

Qual desses quatro pontos pode ser o afixo do número complexo iz ?

- (A) Ponto A
- (B) Ponto B
- (C) Ponto C
- (D) Ponto D

12. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, os números z e w , tais que $z = \frac{w}{3-4i}$, com $|w| = 5$ e $\text{Re}(w) < 0$.

Sabe-se que $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = 0$.

Determine w na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

13.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O item **13.(AE2018)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2018.

O item **13.(AE2023)** integra-se nas Aprendizagens Essenciais homologadas em 2023.

Responda apenas a um dos itens.

13.(AE2018)

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere a função f , de domínio $[0, a]$, com $a > 0$, definida por

$$f(x) = \sin(2x) + \cos x$$

Determine o menor valor de a para o qual a função f tem, exatamente, vinte zeros.

13.(AE2023)

Na Figura 4, estão representados o triângulo $[PQR]$ e os pontos B , C e S .

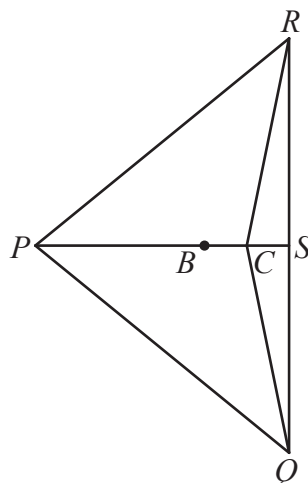


Figura 4

Sabe-se que:

- os pontos B e C são, respetivamente, o baricentro e o circuncentro do triângulo $[PQR]$;
- o ponto S é o ponto médio do segmento de reta $[RQ]$;
- o ponto C pertence ao segmento de reta $[PS]$;
- $\overline{PR} = \overline{PQ}$, $\overline{PB} = 6$ e $\overline{QR} = 6\sqrt{6}$.

Determine $\overline{CS}$.

- * 14. Na Figura 5, está representado um cone reto, com raio da base r e apótema a , sendo r e a dois números reais positivos, com $r < a$. Estão também representados, na base do cone, dois pontos, A e B , sendo o segmento de reta $[AB]$ um diâmetro dessa base.

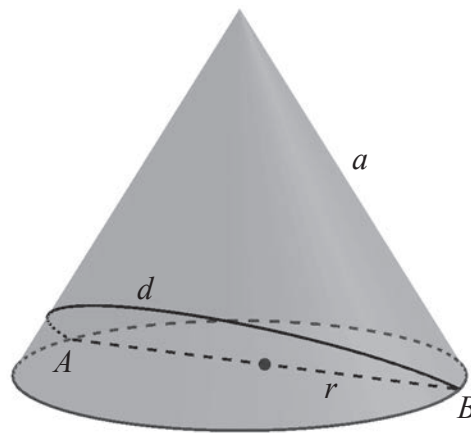


Figura 5

Designando por x o quociente entre o raio da base e o apótema, sabe-se que a distância, d , entre os pontos A e B , pela superfície do cone, é dada pela expressão

$$d(x) = \frac{2r}{x} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \text{ com } x \in]0, 1[$$

Determine, recorrendo à calculadora, o quociente entre o raio da base e o apótema quando a distância entre os pontos A e B , pela superfície do cone, excede em 40% o diâmetro da base do cone.

Apresente o resultado arredondado às milésimas.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- represente, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

15. Considere uma função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, e a reta r , de equação $y = -x + 2$, assíntota ao gráfico da função f .

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$g(x) = f(x) + \frac{x + e^x}{e^x}$$

Determine uma equação da assíntota não vertical ao gráfico da função g .

- * 16. Na Figura 6, estão representados, em referencial o.n. Oxy , a circunferência trigonométrica, o triângulo $[ABC]$ e o ponto D .

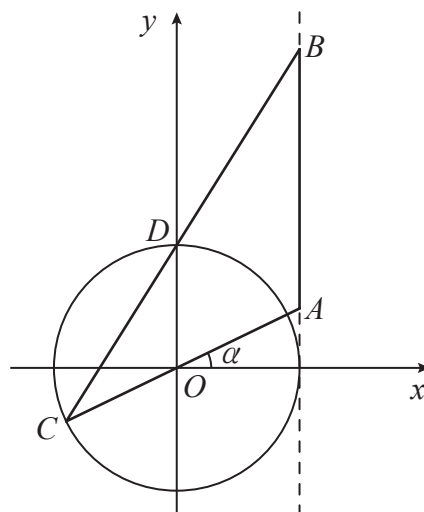


Figura 6

Sabe-se que:

- A é um ponto pertencente à reta de equação $x = 1$, de ordenada positiva;
- α é a inclinação da reta OA , com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$;
- C é o ponto de intersecção da reta OA com a circunferência, de coordenadas negativas;
- D é o ponto de coordenadas $(0, 1)$;
- B é o ponto de intersecção da reta de equação $x = 1$ com a reta CD .

Mostre que

$$\overline{AB} = 1 + \frac{1}{\cos \alpha}$$

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.1.	3.	4.	6.	7.	8.1.	8.2.	10.	11.	14.	16.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	14	12	12	14	14	12	14	14	12	14	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	2.2.		5.		9.		12.		13.		15.		Subtotal
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												42
TOTAL													200

Prova 635

2.^a Fase

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2026

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Critérios de Classificação

15 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

ITENS DE SELEÇÃO

As respostas aos itens de seleção podem ser classificadas de forma dicotómica ou por níveis de desempenho, de acordo com os critérios específicos. No primeiro caso, a pontuação só é atribuída às respostas corretas, sendo todas as outras respostas classificadas com zero pontos. No caso da classificação por níveis de desempenho, a cada nível corresponde uma dada pontuação, de acordo com os critérios específicos.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Linguagem Científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por etapas, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de classificação definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção cujos critérios se apresentam organizados por etapas.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «sem recorrer à calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Notas:

1. A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da fórmula da distância de um ponto a um plano ou da fórmula da distância entre dois planos paralelos, sem as respetivas deduções.
2. Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. 12 pontos

(A)

2.1. 14 pontos

Determinar $f'''(x)$ (ver nota 1) 3 pontos

Escrever $f'''(x) = 0$ 1 ponto

Determinar o zero de $f'''(\sqrt{e})$ 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f''' e de sentido das concavidades do gráfico de f (ou equivalente) 4 pontos

Apresentar o intervalo em que a concavidade do gráfico de f é voltada para cima e o intervalo em que a concavidade do gráfico de f é voltada para baixo (ver nota 2) 2 pontos

Apresentar a abcissa do ponto de inflexão $(\sqrt{e})$ 1 ponto

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função f' , a pontuação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.
2. Se for apresentado o intervalo $]0, \sqrt{e}[$, em vez de $]0, \sqrt{e}]$, e o intervalo $]\sqrt{e}, +\infty[$, em vez de $[\sqrt{e}, +\infty[$, esta etapa deve ser considerada cumprida.

2.2. 14 pontos

Designemos por y_B a ordenada do ponto B .

Reconhecer que a área do triângulo $[AOB]$ é dada por $\frac{\overline{OB} \times e}{2}$ 2 pontos

Reconhecer que o declive da reta r é $f'(e)$ 2 pontos

Obter $f'(e) \left(\frac{3}{e}\right)$ 1 ponto

Reconhecer que o declive da reta s é $-\frac{e}{3}$ 2 pontos

Escrever $y = -\frac{e}{3}x + y_B$ (ou equivalente) 2 pontos

Reconhecer que $0 = -\frac{e}{3} \times (-3) + y_B$ 2 pontos

Obter o valor de y_B $(-e)$ 1 ponto

Obter o valor pedido $\left(\frac{e^2}{2}\right)$ 2 pontos

3. 12 pontos

3.(AE2018)

(B)

3.(AE2023)

(B)

4. 12 pontos

(a) → (3) (b) → (3) (c) → (1) (d) → (2)

Este item deve ser classificado de acordo com os níveis de desempenho seguintes.

Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
3	Completa o texto com as 4 opções corretas.	12
2	Completa o texto com 3 opções corretas.	8
1	Completa o texto com 2 opções corretas.	4

5. 14 pontos

Reconhecer que o algarismo das unidades é 0 ou 5 2 pontos

Reconhecer que o algarismo das dezenas de milhares é 5, 6, 7, 8 ou 9 2 pontos

Determinar o número de sequências distintas em que o algarismo das unidades é 0 e o algarismo das dezenas de milhares é 5, 6, 7, 8 ou 9 (1680) 5 pontos

Determinar o número de sequências distintas em que o algarismo das unidades é 5 e o algarismo das dezenas de milhares é 6, 7, 8 ou 9 (1344) 4 pontos

Obter o valor pedido (3024) 1 ponto

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

Designemos por A o acontecimento «o número inscrito no cartão é par» e por M o acontecimento «o número inscrito no cartão é múltiplo de três».

1.º Processo

Reconhecer que $P(M) = 0,625$	1 ponto
Reconhecer que $P(A \overline{M}) = \frac{1}{3}$	2 pontos
Obter $P(\overline{M})$ (0,375)	1 ponto
Obter $P(A \cap \overline{M})$ (0,125)	2 pontos
Identificar o pedido com $P(M \cup \overline{A})$	2 pontos
Reconhecer que $P(M \cup \overline{A}) = P(M) + P(\overline{A}) - P(M \cap \overline{A})$	1 ponto
Reconhecer que $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$	1 ponto
Reconhecer que $P(M \cap \overline{A}) = P(M) - P(M \cap A)$	1 ponto
Obter $P(M \cup \overline{A}) = 1 - P(A) + P(M \cap A)$	1 ponto
Reconhecer que $P(A) - P(M \cap A) = P(A \cap \overline{M})$	1 ponto
Obter o valor pedido $\left(\frac{7}{8}\right)$	1 ponto

2.º Processo

Reconhecer que $P(M) = 0,625$	1 ponto
Reconhecer que $P(A \overline{M}) = \frac{1}{3}$	2 pontos
Obter $P(\overline{M})$ (0,375)	1 ponto
Obter $P(A \cap \overline{M})$ (0,125)	2 pontos
Identificar o pedido com $P(M \cup \overline{A})$	2 pontos
Reconhecer que $P(\overline{M \cup \overline{A}}) = P(\overline{M} \cap A)$	4 pontos
Obter $P(M \cup \overline{A}) = 1 - P(\overline{M} \cap A)$	1 ponto
Obter o valor pedido $\left(\frac{7}{8}\right)$	1 ponto

7. (ver nota) 14 pontos

Nota – Se forem apresentadas respostas aos dois itens, classifica-se apenas a primeira resposta.

7.(AE2018)

Mostrar que $u_{n+1} - u_n > 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ 12 pontos

Escrever $u_{n+1} = \frac{3n+8}{n+3}$ (ou equivalente) 4 pontos

Obter $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ (ou equivalente) 5 pontos

Concluir que $u_{n+1} - u_n > 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ 3 pontos

Concluir que a sucessão (u_n) é monótona crescente 2 pontos

7.(AE2023)

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) 4 pontos

Determinar $f(-1)$ $\left(e^{-1} - \frac{1}{2}\right)$ 2 pontos

Determinar $f'(-1)$ $(-e^{-1})$ 2 pontos

Reconhecer que a aproximação pedida é dada por $-1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)}$ 4 pontos

Obter o valor pedido $(-1,359)$ 2 pontos

2.º Processo

Designemos por r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -1 .

Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) 4 pontos

Determinar $f'(-1)$ $(-e^{-1})$ 2 pontos

Determinar $f(-1)$ $\left(e^{-1} - \frac{1}{2}\right)$ 2 pontos

Obter uma equação da reta r $\left(y = -e^{-1}x - \frac{1}{2}\right)$ 2 pontos

Determinar a abcissa do ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox

$\left(-\frac{e}{2}\right)$ 2 pontos

Obter o valor pedido $(-1,359)$ 2 pontos

Nota: Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função f , a pontuação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

8.1. 12 pontos

(B)

8.2. 14 pontos

Reconhecer que o ponto B é o ponto de intersecção da reta AB com o plano BCF 1 ponto

Reconhecer que a reta AB é perpendicular ao plano BCF 1 ponto

Reconhecer que o vetor de coordenadas $(-3, 6, -2)$ é um vetor diretor da reta AB 1 ponto

Escrever uma equação vetorial da reta AB
 $((x, y, z) = (-3, 5, 2) + k(-3, 6, -2), k \in \mathbb{R})$ 2 pontos

Reconhecer que as coordenadas do ponto B são da forma
 $(-3 - 3k, 5 + 6k, 2 - 2k)$ 2 pontos

Escrever $-3(-3 - 3k) + 6(5 + 6k) - 2(2 - 2k) + 14 = 0$
(ou equivalente) 2 pontos

Obter o valor de k (-1) 1 ponto

Determinar as coordenadas do ponto B $((0, -1, 4))$ 1 ponto

Determinar $\overline{AB}$ (7) 2 pontos

Obter o valor pedido (343) 1 ponto

9. 14 pontos

Reconhecer que o declive da reta AD é igual a -2	2 pontos
Determinar a ordenada na origem da reta AD (4)	2 pontos
Reconhecer que o ponto D tem coordenadas $(0, 4)$	1 ponto
Obter o pedido	9 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Reconhecer que C é o ponto de intersecção da reta DC com a reta BC	2 pontos
Reconhecer que a reta DC é perpendicular à reta AD	2 pontos
Obter uma equação da reta DC $\left(y = \frac{1}{2}x + 4\right)$	2 pontos
Determinar as coordenadas do ponto C $\left(\left(\frac{2}{5}, \frac{21}{5}\right)\right)$	3 pontos

2.º Processo

Reconhecer que $C = B + \overrightarrow{AD}$	2 pontos
Reconhecer que B é o ponto de intersecção da reta AB com a reta BC	1 ponto
Reconhecer que a reta AB é perpendicular à reta BC	1 ponto
Escrever uma equação da reta AB $\left(y = \frac{1}{2}x - 1\right)$	2 pontos
Determinar as coordenadas do ponto B $\left(\left(\frac{12}{5}, \frac{1}{5}\right)\right)$	1 ponto
Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AD}$ $((-2, 4))$	1 ponto
Determinar as coordenadas do ponto C $\left(\left(\frac{2}{5}, \frac{21}{5}\right)\right)$	1 ponto

3.º Processo

Reconhecer que o vetor $\vec{u}$, de coordenadas $(1, -2)$, é um vetor diretor da reta BC	1 ponto
Reconhecer que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$	2 pontos
Reconhecer que as coordenadas do ponto C são da forma $(x, -2x + 5)$	1 ponto
Escrever as coordenadas do vetor $\overrightarrow{DC}$ em função de x $((x, -2x + 1))$	1 ponto
Obter $5x - 2 = 0$	2 pontos
Determinar as coordenadas do ponto C $\left(\left(\frac{2}{5}, \frac{21}{5}\right)\right)$	2 pontos

10. 14 pontos

Tópicos de resposta

- Justificação da falsidade da proposição I.
Exemplo: Como $f'(x) < 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a função f é decrescente em $\mathbb{R}$; logo, $f(1) \leq f(0)$, ou seja, $f(1) \leq 2$.
- Justificação da falsidade da proposição II.
Exemplo: Como a função f é contínua no intervalo $[1, 2]$ e $f(1) \times f(2) < 0$, conclui-se, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, que existe, pelo menos, um zero da função f no intervalo $]1, 2[$. Dado que $D_{\frac{1}{f}} = \{x \in D_f : f(x) \neq 0\}$, o domínio de $\frac{1}{f}$ não pode ser $\mathbb{R}$.

Parâmetro	Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
A Conteúdos	4	Apresenta, de forma completa, as duas justificações solicitadas.	12
	3	Apresenta, de forma completa, uma das justificações solicitadas e, de forma incompleta, a outra justificação.	9
	2	Apresenta, de forma completa, apenas uma das justificações solicitadas. OU Apresenta, de forma incompleta, as duas justificações solicitadas.	6
	1	Apresenta, de forma incompleta, apenas uma das justificações solicitadas.	3
B Linguagem Científica	2	Utiliza adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	2
	1	Utiliza, embora com uma ou mais falhas, o vocabulário específico da Matemática.	1

11. 12 pontos

(B)

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $w = a + bi$ 1 ponto

Escrever $z = \frac{(a + bi)(3 + 4i)}{25}$ (ou equivalente) 2 pontos

Obter $z = \frac{3a - 4b}{25} + \frac{4a + 3b}{25}i$ 2 pontos

Escrever $\frac{3a - 4b}{25} = \frac{-4a - 3b}{25}$ (ou equivalente) 2 pontos

Obter $b = 7a$ 1 ponto

Reconhecer que $a^2 + b^2 = 25$ 2 pontos

Obter $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\vee$ $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ou equivalente) 2 pontos

Obter o número pedido

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{7\sqrt{2}}{2}i, \text{ ou equivalente}\right)$ 2 pontos

2.º Processo

Reconhecer que $z = a - ai$ 3 pontos

Escrever $w = (a - ai)(3 - 4i)$ 2 pontos

Obter $w = -a - 7ai$ 2 pontos

Obter $50a^2 = 25$ (ou equivalente) 3 pontos

Obter $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\vee$ $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ou equivalente) 2 pontos

Obter o número pedido

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{7\sqrt{2}}{2}i, \text{ ou equivalente}\right)$ 2 pontos

13. (ver nota) 14 pontos

Nota – Se forem apresentadas respostas aos dois itens, classifica-se apenas a primeira resposta.

13.(AE2018)

Determinar o número de zeros da função f no intervalo $[0, 2\pi[$ 7 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $2 \sin x \cos x + \cos x = 0$ 2 pontos

Obter $\cos x(2 \sin x + 1) = 0$ 1 ponto

Obter $\cos x = 0 \vee \sin x = -\frac{1}{2}$ 2 pontos

Justificar que a função f tem exatamente quatro zeros no intervalo $[0, 2\pi[$ 2 pontos

2.º Processo

Escrever $\sin(2x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (ou equivalente) 2 pontos

Obter $2x = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x = \frac{3\pi}{2} - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 3 pontos

Justificar que a função f tem exatamente quatro zeros no intervalo $[0, 2\pi[$ 2 pontos

Reconhecer que o maior zero da função f , no intervalo $[0, 2\pi[$, é $\frac{11\pi}{6}$... 1 ponto

Reconhecer que existem vinte zeros da função f no intervalo $[0, 10\pi[$ 2 pontos

Determinar o valor de a 4 pontos

Reconhecer que a é o maior zero da função f no intervalo $[0, 10\pi[$ 2 pontos

Obter o valor pedido $\left(\frac{59\pi}{6}\right)$ 2 pontos

13.(AE2023)

Escrever $\overline{PB} = \frac{2}{3}\overline{PS}$ (ou equivalente)	4 pontos
Obter $\overline{PS} = 9$	2 pontos
Reconhecer que $\overline{CQ} = \overline{CR} = \overline{CP}$	2 pontos
Reconhecer que $\overline{CR} = 9 - \overline{CS}$	2 pontos
Escrever $(9 - \overline{CS})^2 = \overline{CS}^2 + 54$ (ou equivalente)	2 pontos
Obter o valor pedido $\left(\frac{3}{2}, \text{ou equivalente}\right)$	2 pontos

14. 14 pontos

Reconhecer que exceder o diâmetro em 40% corresponde a $1,4 \times 2r$	2 pontos
Escrever a equação $d(x) = 2,8r$ (ou equivalente) (ver nota 1)	2 pontos
Reconhecer que a equação $d(x) = 2,8r$ é equivalente à equação $\frac{1}{x} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1,4$	2 pontos
Representar o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (ver notas 2 e 3)	5 pontos
Assinalar o ponto relevante	1 ponto
Apresentar o valor pedido (0,523)	2 pontos

Notas:

1. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, desde que seja inequívoco que este corresponde à resolução da equação que traduz corretamente o problema.
2. Se não for apresentado um referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.
3. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

15. 14 pontos

Determinar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ 7 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x) + \frac{x+e^x}{e^x}}{x} \right)$ 1 ponto

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x) + \frac{x+e^x}{e^x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+e^x}{xe^x}$... 1 ponto

Reconhecer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ 2 pontos

Obter $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+e^x}{xe^x} = 0$ 2 pontos

Obter $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -1$ 1 ponto

Determinar $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + x)$ 6 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + \frac{x+e^x}{e^x} + x \right)$ 1 ponto

Obter $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + \frac{x+e^x}{e^x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+e^x}{e^x} \right)$.. 1 ponto

Reconhecer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = 2$ 2 pontos

Obter $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+e^x}{e^x} \right) = 1$ 1 ponto

Obter $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + x) = 3$ 1 ponto

Escrever a equação da assíntota não vertical ($y = -x + 3$) 1 ponto

16. 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que a ordenada do ponto A é $\operatorname{tg} \alpha$ 1 ponto

Reconhecer que as coordenadas do ponto C são $(-\cos \alpha, -\operatorname{sen} \alpha)$ 2 pontos

Escrever a equação reduzida da reta CD $\left(y = \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} x + 1 \right)$ 4 pontos

Determinar a ordenada do ponto B $\left(\frac{1 + \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha} \right)$ (ou equivalente) 3 pontos

Concluir o pretendido 4 pontos

2.º Processo

- Reconhecer que a amplitude do ângulo convexo AOD é $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 1 ponto
- Determinar a amplitude do ângulo convexo ACB $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ 2 pontos
- Reconhecer que a amplitude do ângulo suplementar ao ângulo BAC é $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 2 pontos
- Determinar a amplitude do ângulo convexo BAC $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ 2 pontos
- Determinar a amplitude do ângulo convexo CBA $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ 1 ponto
- Reconhecer que $\overline{AB} = \overline{AC}$ 1 ponto
- Reconhecer que as coordenadas do ponto A são $(1, \operatorname{tg} \alpha)$ 1 ponto
- Obter $\overline{OA} = \frac{1}{\cos \alpha}$ 3 pontos
- Concluir o pretendido 1 ponto

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.1.	3.	4.	6.	7.	8.1.	8.2.	10.	11.	14.	16.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	14	12	12	14	14	12	14	14	12	14	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	2.2.		5.		9.		12.		13.		15.		Subtotal
Cotação (em pontos)	3 x 14 pontos												42
TOTAL													200